Wiskunde deel 2
Werkboek

ThiemeMeulenhoff

Colofon

Illustraties
Kre-add/Marcel Westervoorde,
Alphen a/d Rijn

Omslag
Eduardo Media

Opmaak
PPMP Prepress, Wolvega

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 61719 1
Tweede druk, eerste oplage 2019

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2008

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

Inhoud

Les 1 De loterij ... 4
Les 2 Priemloten ... 7
Les 3 Knap geknipt deel 1 ... 10
Les 4 Knap geknipt deel 2 ... 12

Toets 1 ... 14

Les 5 De machtige twee ... 16
Les 6 De goocheltruc ... 18
Les 7 Slingers ... 21
Les 8 De stelling van Pythagoras ... 23

Toets 2 ... 26

Les 9 Het tijdspel deel 1 ... 29
Les 10 Het tijdspel deel 2 ... 31
Les 11 Mobiele puzzels ... 33
Les 12 Hoe ver komt jouw paard? ... 35

Toets 3 ... 37

Les 13 Een oud kunstje ... 39
Les 14 Twee nieuwe scholen ... 41
Les 15 De parachute ... 43
Les 16 De mieren van Pascal ... 45

Toets 4 ... 47

Eindtoets A ... 49

Eindtoets B ... 51

Les 1 De Loterij

Op de school van Lotte en Tonio wordt over een maand een actiedag gehouden. Alle kinderen helpen mee om acties te bedenken. Lotte en Tonio gaan een loterij organiseren. Ze zien er niets in om snel nog allerlei prijsjes te verzamelen, dus besluiten ze om met geldprijzen te werken. De opbrengst van de verkochte loten gaat naar het goede doel, tenminste, nadat alle geldprijzen uitgekeerd zijn.

Tonio wil de hoogte van de geldprijs laten afhangen van het lotnummer en daarbij uitgaan van deelbaarheid. Is het lotnummer deelbaar door 1, dan krijg je 1 euro, is het lotnummer deelbaar door 2, dan krijg je 2 euro. Dit gaat zo door tot en met delen door 10. Het deelbaar zijn door getallen groter dan 10 levert niets meer op. Iemand die bijvoorbeeld lotnummer 15 heeft, krijgt in de plannen van Tonio 9 euro, immers 15 is deelbaar door 1, door 3 en door 5.

Maar hoe duur moeten Lotte en Tonio de loten maken? Lotte denkt aan € 10,- per stuk. De koper van lotnummer 15 heeft dan 1 euro verlies. Als die euro niet als prijzengeld voor een ander lot nodig is, dan gaat hij naar het goede doel.

Wat vind jij van de plannen van Lotte en Tonio? De belangrijkste vraag is natuurlijk of de loterij op deze manier genoeg zal opleveren voor het goede doel. Denk mee over de loterij en beantwoord de volgende vragen. Alle loten worden op volgorde van nummer verkocht.

1 Levert lotnummer 6 winst of verlies op voor de eigenaar van het lot? En lotnummer 7?
Lotnummer 6 levert 1 + 2 + 3 + 6 = 12 euro op. Dus € 2,- winst voor de eigenaar van het lot. Lotnummer 7 levert 1 + 7 = 8 euro op. Dus € 2,- verlies.

2 Welke van de lotnummers 1 tot en met 20 leveren voor de eigenaar het grootst mogelijke verlies op? Hoeveel is dan het verlies? De lotnummers 1, 11, 13, 17 en 19 zijn van deze mogelijkheden alleen door 1 deelbaar en leveren dus € 9,- verlies op.

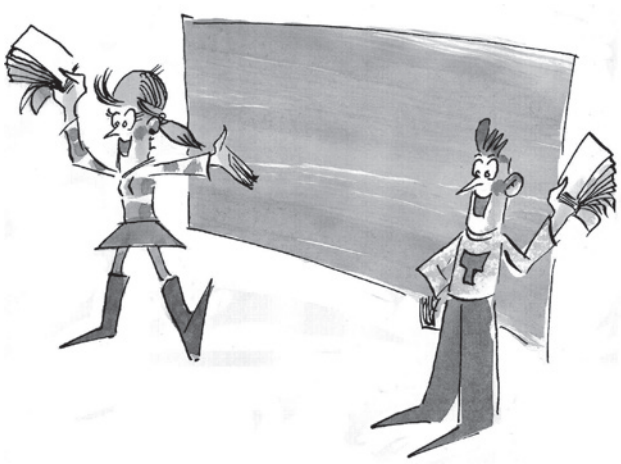
3 Welke van de lotnummers 1 tot en met 20 leveren voor de eigenaar winst op?
Welk nummer zorgt voor de grootste winst? Lotnummers 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18 en 20 leveren meer dan € 10,- op en zijn dus winstgevend. 20 is deelbaar door 1, 2, 4, 5 en 10 en zorgt met een prijs van € 22,- voor de grootste winst, namelijk € 12,-.

4 Wat is de grootst mogelijke winst bij de eerste 100 loten? (nummers 1 tot en met 100)
De grootst mogelijke winst geeft het nummer 90. 90 is deelbaar door 1, 2, 3, 5, 6, 9 en 10 en levert € 26,- winst op.

5 Wat is het hoogste bedrag dat iemand bij deze loterij kan winnen?
Hoeveel loten moeten er dan minimaal verkocht zijn? Het hoogste bedrag kan iemand winnen bij een getal dat deelbaar is door 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en door 10. De winst is dan € 45,- (55 euro – 10 euro). Er moeten dan 72 x 5 x 7 = 2520 loten verkocht zijn, want 2520 is het eerste getal dat deelbaar is door 1 tot en met 10. Je kunt dit getal ook vinden door uit te gaan van 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, en dan alle delers weg te halen die meer dan één keer voorkomen.

6 Welk bedrag gaat er naar het goede doel als Lotte en Tonio precies 10 loten verkopen (lotnummers 1 tot en met 10)? Bij de loten 1 tot en met 10 blijft er over voor het goede doel: 10 x 10 euro per lot – prijzengeld = 100 euro – 87 euro = 13 euro.

7 Welk bedrag gaat er naar het goede doel als er 20 loten verkocht worden? Bij de loten 11 tot en met 20 blijft er € 3,- over voor het goede doel. Dus de opbrengst voor het goede doel van de eerste 20 loten is in totaal € 16,-.



Lotte ziet het al voor zich, dat wordt een berg rekenwerk als er 200 loten verkocht worden. Eigenlijk wil ze een meer algemene voorspelling doen, waarbij het niet uitmaakt of er nu 100 of 200 loten verkocht worden.

8 Kun jij een schatting maken over de opbrengst van de loterij als er meer dan 100 loten verkocht worden? De opbrengst van de loterij zal zo goed als niets zijn.
Uitleg: in plaats van per nummer de prijs uit te rekenen, kun je ook uitrekenen hoeveel prijzengeld er betaald moet worden aan nummers die door 2 deelbaar zijn. Hoeveel prijzengeld aan nummers door 3 deelbaar en zo verder. We gaan even uit van 200 loten. Alle getallen zijn deelbaar door 1, dus voor elk lot moet al € 1,- aan prijzengeld betaald worden: bij elkaar € 200,-. 100 getallen zijn deelbaar door 2, dus aan prijzengeld daarvoor wordt betaald: 100 x € 2,- = € 200,-. Een op de drie getallen is deelbaar door 3, dus hiervoor moet aan prijzengeld betaald worden ongeveer 200 : 3 x € 3,- = € 200,-. (niet precies omdat 200 niet deelbaar is door 3, de 66 drievouden onder de 200 leveren € 198,- op) Zo doorgaand bemerk je dat voor de deelbaarheid door elk getal tot en met 10 bij benadering € 200,- aan prijzengeld betaald moet worden. Bij elkaar is dat 10 x € 200,- en dat is precies het bedrag dat betaald wordt voor de loten. Er blijft dan dus niets over voor het goede doel.

Tip: Een tweevoud is een getal dat door twee deelbaar is. Wat ben je gemiddeld per lot kwijt aan de tweevouden? (Ook in dit geval zijn de getallen die deelbaar zijn door 1 *eenvoudig*!) Maar hoe zit dat met de drievouden en viervouden? En verder?

9 Hoe duur zou jij de loten maken? Ter beoordeling van de leerkracht.
Om te bereiken dat de loterij iets oplevert, zal een lot in ieder geval duurder dan 10 euro moeten zijn.

Les 2 Priemloten

Lotte en Tonio (uit Les 1) zijn erachter gekomen dat hun manier om de loterij op te zetten niet het gewenste resultaat oplevert.
Gelukkig krijgen ze assistentie van enkele klasgenoten. In de klas van Lotte en Tonio zitten enkele ijverige rekenaars. Zo hebben Gunil en Diederik een variatie voor het prijzengeld bedacht en Meike en Johan hebben weer een ander plan.

Gunil en Diederik redeneren als volgt. Alle getallen zijn deelbaar door 1 en door zichzelf.
De kunst is nu niet om zoveel mogelijk delers te hebben, maar om er verder géén te hebben.
Hun wiskundeleraar heeft kort geleden nog verteld dat zulke getallen priemgetallen genoemd worden. Het getal 1 is een uitzondering. 1 rekent men niet tot de priemgetallen.

> Het plan 'GuDie' van Gunil en Diederik houdt in dat een lotnummer dat geen priemgetal is, geen prijs oplevert. Een lot waarvan het nummer wel een priemgetal is, levert precies zoveel euro op als het lotnummer. Gunil en Diederik gaan er vanuit dat er niet meer dan 100 loten verkocht zullen worden.

1 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in plan 'GuDie' als de eerste 50 loten verkocht worden?
Een lot kost 10 euro. De verkoop van 50 loten levert op: 50 × € 10,- = € 500,-.
Aan prijzen wordt uitgereikt: 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 = € 328,-. Het verschil gaat naar het goede doel: € 172,-.

Meike en Johan vinden dat een getal met veel delers juist wel een prijs moet opleveren. Zij gaan ook uit van maximaal 100 verkochte loten en hebben van de getallen 1 tot en met 100 het aantal delers berekend. Hoe meer delers, hoe beter. Dezelfde deler mag zelfs vaker dan één keer meetellen. Daarom is het van belang zo ver mogelijk door te delen.

Bijvoorbeeld: ***12 = 2 × 6****, maar* ***6 = 2 × 3****, dus*
12 = 2 × 2 × 3 *geeft één deler meer.*
Factor 1 doet niet mee. Dat zou flauw zijn:
12 = 2 × 2 × 3 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1…

2 Wat voor soort getallen zijn de delers die je op deze manier vindt? Priemgetallen

Dit uitsplitsen van een getal in delers die priemgetallen zijn, heet *ontbinden in priemfactoren*.
12 is dus ontbonden in drie factoren, twee keer priemfactor 2 en één keer priemfactor 3.

Het voorstel 'JoMei' van Johan en Meike is als volgt:

> Lotnummers met drie of minder factoren hebben geen prijs.
> Bij een lotnummer dat je kunt ontbinden in vier factoren, krijgt de eigenaar zijn geld terug.
> Een lotnummer dat je kunt ontbinden in vijf factoren wint een prijs van 25 euro en lotnummers ontbonden in zes of meer factoren winnen een hoofdprijs van 100 euro.

Gebruik het onderstaande schema om een antwoord op de volgende vragen te vinden.

1 = 1	26 = 2 × 13	51 = 3 × 17	76 = 2 × 2 × 19
2 = 2	27 = 3 × 3 × 3	52 = 2 × 2 × 13	77 = 7 × 11
3 = 3	28 = 2 × 2 × 7	53 = 53	78 = 2 × 3 × 13
4 = 2 × 2	29 = 29	54 = 2 × 3 × 3 × 3 (4)	79 = 79
5 = 5	30 = 2 × 3 × 5	55 = 5 × 11	80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5
6 = 2 × 3	31 = 31	56 = 2 × 2 × 2 × 7 (4)	81 = 3 × 3 × 3 × 3 (4)
7 = 7	32 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2	57 = 3 × 19	82 = 2 × 41
8 = 2 × 2 × 2	33 = 3 × 11	58 = 2 × 29	83 = 83
9 = 3 × 3	34 = 2 × 17	59 = 59	84 = 2 × 2 × 3 × 7 (4)
10 = 2 × 5	35 = 5 × 7	60 = 2 × 2 × 3 × 5 (4)	85 = 5 × 17
11 = 11	36 = 2 × 2 × 3 × 3	61 = 61	86 = 2 × 43
12 = 2 × 2 × 3	37 = 37	62 = 2 × 31	87 = 3 × 29
13 = 13	38 = 2 × 19	63 = 3 × 3 × 7	88 = 2 × 2 × 2 × 11 (4)
14 = 2 × 7	39 = 3 × 13	64 = 2×2×2×2×2×2	89 = 89
15 = 3 × 5	40 = 2 × 2 × 2 × 5	65 = 5 × 13	90 = 2 × 3 × 3 × 5 (4)
16 = 2 × 2 × 2 × 2 (4)	41 = 41	66 = 2 × 3 × 11	91 = 7 × 13
17 = 17	42 = 2 × 3 × 7	67 = 67	92 = 2 × 2 × 23
18 = 2 × 3 × 3	43 = 43	68 = 2 × 2 × 17	93 = 3 × 31
19 = 19	44 = 2 × 2 × 11	69 = 3 × 23	94 = 2 × 47
20 = 2 × 2 × 5	45 = 3 × 3 × 5	70 = 2 × 5 × 7	95 = 5 × 19
21 = 3 × 7	46 = 2 × 23	71 = 71	96 = 2×2×2×2×2×3
22 = 2 × 11	47 = 47	72 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3	97 = 97
23 = 23	48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3	73 = 73	98 = 2 × 7 × 7
24 = 2 × 2 × 2 × 3 (4)	49 = 7 × 7	74 = 2 × 37	99 = 3 × 3 × 11
25 = 5 × 5	50 = 2 × 5 × 5	75 = 3 × 5 × 5	100 = 2 × 2 × 5 × 5 (4)

5 factoren 6 factoren

3 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'JoMei' als de eerste 50 loten verkocht worden? Ook in voorstel 'JoMei' kost een lot 10 euro. De eerste 50 loten brengen 50 x € 10,- = € 500,- op. Bij 6 van die 50 loten moet een prijs betaald worden: 4 x € 10,- + 2 x € 25,- = € 90,-. Er gaat € 410,- naar het goede doel.

4 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'JoMei' als er 100 loten verkocht worden?

100 verkochte loten brengen € 1000,- op. Bij de eerste 50 loten moet € 90,- aan prijzengeld betaald worden. (zie opgave 3). Bij de tweede 50 loten is het prijzengeld: 8 x € 10,- + 2 x € 25,- + 2 x € 100,- = € 330,-. Het totale prijzengeld voor 100 verkochte loten is € 90,- + € 330,- = € 420,-.
Er gaat € 580,- naar het goede doel.

5 Hoeveel geld gaat er naar het goede doel in voorstel 'GuDie' als er 100 loten verkocht worden?

Er gaat niets naar het goede doel. Uitleg: ook hier brengen 100 verkochte loten € 1000,- op. Het prijzengeld van de eerste 50 loten is € 328,- (zie opgave 1). Het prijzengeld van de tweede 50 loten is 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 = € 732,-.
Het totale prijzengeld voor 100 verkochte loten is € 328,- + € 732,- = € 1060,-. Dat betekent € 60,- verlies.

6 Welk voorstel heeft jouw voorkeur? Waarom? Gezien vanuit de opbrengst voor het goede doel verdient voorstel 'JoMei' de voorkeur. Zowel bij 50 verkochte loten als bij 100 loten is voorstel 'JoMei' beter.

7 Kun je tot slot voorspellen wat er zal gebeuren als er 500 loten verkocht worden?

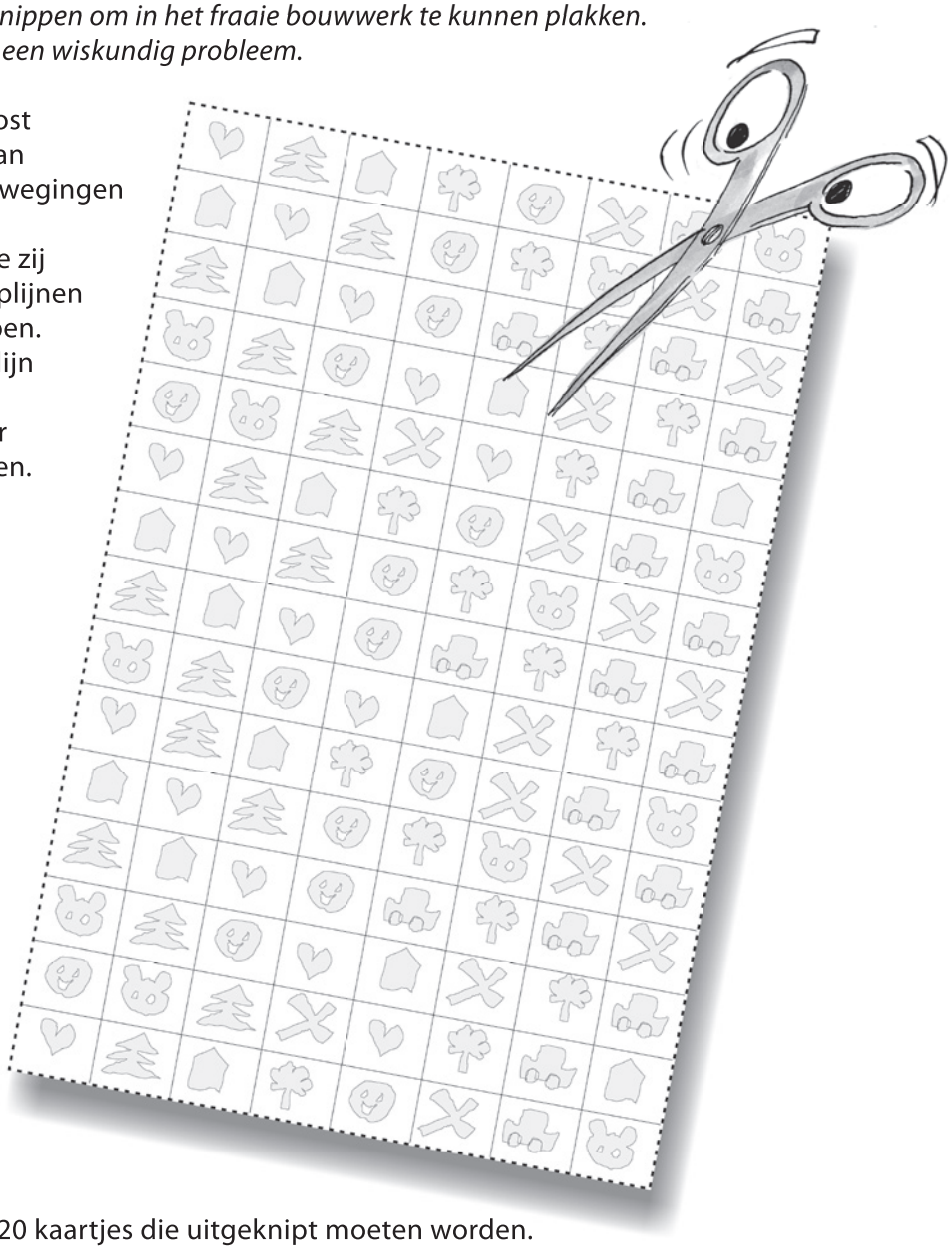
In beide voorstellen zal er verlies geleden worden.
Uitleg: in voorstel 'GuDie' is dat al het geval na 100 verkochte loten.
De priemgetallen groter dan 100, zoals 463 en 491, zorgen voor nog grotere verliezen. Maar ook in voorstel 'JoMei' gaat het mis met de grote getallen. Je vindt boven 100 steeds meer getallen die in 6 of meer factoren ontbonden kunnen worden en waarbij dus 100 euro aan prijzengeld betaald moet worden.

Les 3 Knap geknipt deel 1

Pleun is geconcentreerd bezig met een kunststuk voor school.
Zij heeft de afgelopen weken op een stevig vel tekenpapier 120 kleine kaartjes getekend.
Die kaartjes wil ze nu uitknippen om in het fraaie bouwwerk te kunnen plakken.
Bij dat knippen ziet Pleun een wiskundig probleem.

Een lang stuk knippen kost Pleun minder energie, dan steeds met korte knipbewegingen van richting veranderen.
Zij wil daarom weten hoe zij met zo min mogelijk kniplijnen de kaartjes uit kan knippen.
Hierbij moet je een kniplijn zien als een lijn die je aansluitend knipt zonder van richting te veranderen.

Zodra je van richting verandert, begint een nieuwe kniplijn. Ook wanneer je van het papier afgaat, geldt dat als overgaan naar een nieuwe kniplijn. Dus losse stukken papier tegen elkaar leggen (met de lijnen in elkaars verlengde) mag je niet als één kniplijn tellen.



1 Bekijk het blad met de 120 kaartjes die uitgeknipt moeten worden.
Hoeveel kniplijnen zijn er als elke rand van een kaartje als een aparte kniplijn geldt?

De stippellijnen moet je niet meetellen, dat zijn de randen van het blad. .....

$15 \times 7 + 8 \times 14 = 105 + 112 = 217$

2 Wat is het laagst mogelijke aantal kniplijnen waarmee jij de 120 kaartjes kunt uitknippen?

Beschrijf de manier waarop je dat zou doen. Vergelijk je antwoord met de antwoorden op de volgende vragen.

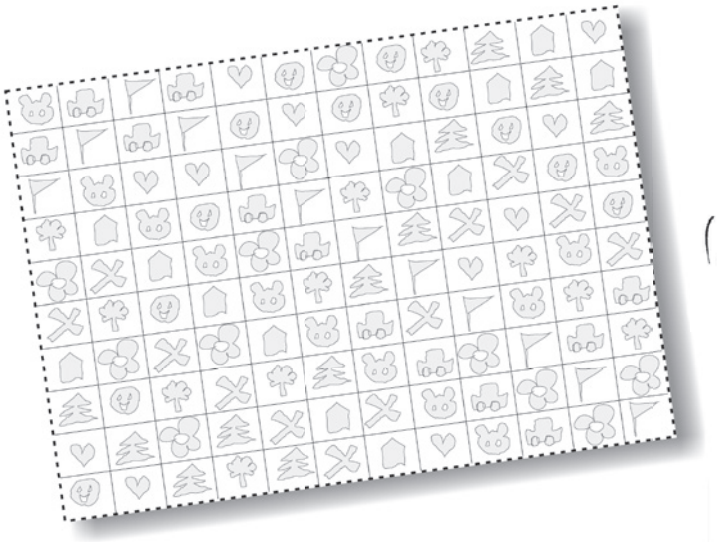
.....

Ellen, de moeder van Pleun, hoort behalve haar warme celloklanken ook het probleem en kijkt naar de vier snaren van haar cello. 'Je hebt veel minder kniplijnen als je eerst alle verticale lijnen helemaal knipt. Die lijnen zijn lekker lang', merkt zij op.
Pleun zegt: 'Je kunt ook eerst alle horizontale lijnen helemaal knippen, dat zijn er lekker veel.'

3 Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle verticale lijnen knipt? 7 + 8 x 14 = 119

4 Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle horizontale lijnen knipt? 14 + 15 x 7 = 119

5 Op welke manier maak je de minste kniplijnen, door eerst alle verticale lijnen te knippen of door eerst alle horizontale lijnen te knippen? Lijkt jouw oplossing op een van deze twee manieren?
Beide manieren (in het ene geval eerst verticaal en in het andere geval eerst horizontaal) hebben evenveel kniplijnen.



Pleun is een echte denker. Zo vraagt ze zich af of het verschil zou uitmaken als ze de kaartjes op haar vel anders zou indelen.

6 Wat zijn de antwoorden op de vragen 1 t/m 5 als de 120 kaartjes getekend zijn zoals in de afbeelding hierboven in 10 rijen en 12 kolommen?

1 10 x 11 + 12 x 9 = 218
2 Zie antwoord opgave 2.
3 11 + 12 x 9 = 119
4 9 + 10 x 11 = 119
5 Bij beide manieren evenveel.

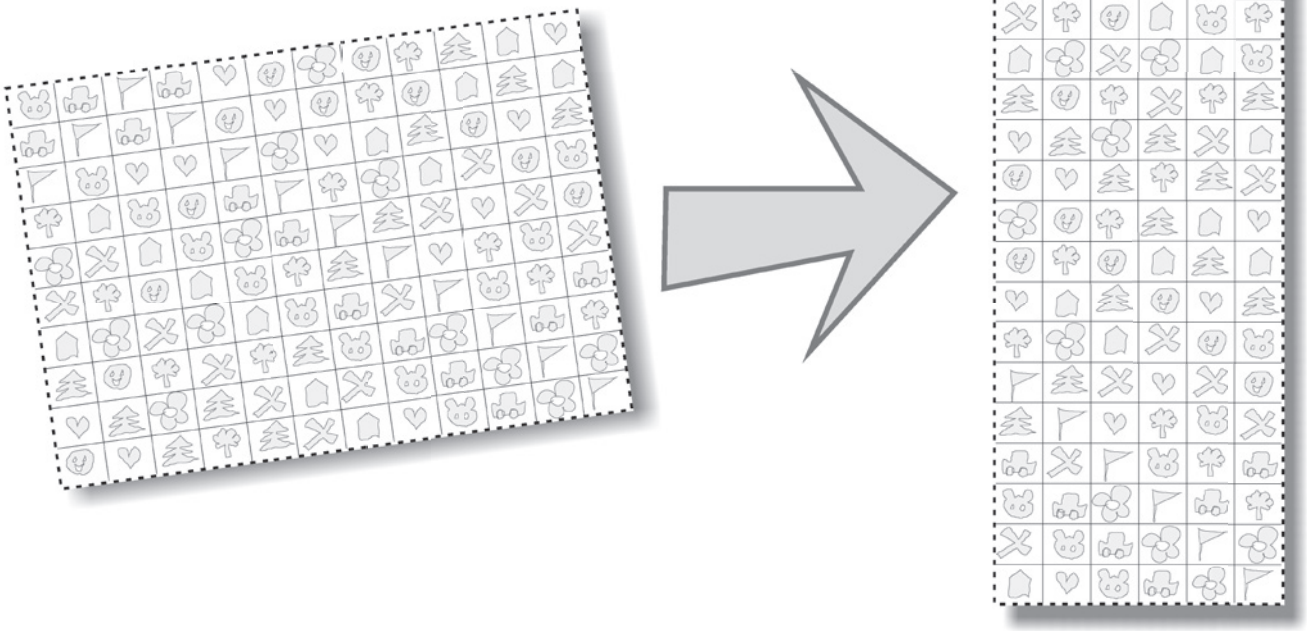
7 Bij welke indeling is het aantal kniplijnen het kleinst, bij **15 bij 8** of bij **10 bij 12**?
De aantallen zijn gelijk.

Les 4 Knap geknipt deel 2

In Les 3 heb je randen en kniplijnen geteld van 120 kaartjes op een vel papier. Eerst bij 120 kaartjes in 15 rijen en 8 kolommen, daarna bij 120 kaartjes in 10 rijen en 12 kolommen.
Je kon het aantal kniplijnen flink beperken door eerst alle verticale of horizontale lijnen te knippen.

1 Welke andere indelingen in rijen en kolommen voor 120 kaartjes kun je nog bedenken?
Als 10 rijen, 12 kolommen en 12 rijen, 10 kolommen als twee verschillende indelingen gelden, zijn er in totaal 16 indelingen.

1 bij 120	120 bij 1	2 bij 60	60 bij 2
3 bij 40	40 bij 3	4 bij 30	30 bij 4
5 bij 24	24 bij 5	6 bij 20	20 bij 6
8 bij 15	15 bij 8	10 bij 12	12 bij 10



2 Beantwoord voor alle zestien indelingen de volgende twee vragen.
Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle verticale lijnen knipt?
Hoeveel kniplijnen maak je als je eerst alle horizontale lijnen knipt?

Je kunt bij deze vragen natuurlijk geduldig een voor een alle nodige berekeningen uitvoeren.
Je kunt ook als een echte wiskundige zoeken naar een meer algemene berekening. Een berekening die je kunt toepassen op alle verschillende indelingen.

Als jij zonder verdere aanwijzingen dit probleem wilt aanpakken, lees dan niet verder en schrijf hieronder wat je bedacht en berekend hebt.
Wil je die aanwijzingen wel, maak dan eerst de opgaven op de volgende pagina.

In alle gevallen is het antwoord 119.

3 Met behulp van een tabel kun je iets algemeens ontdekken over het aantal kniplijnen.
We onderzoeken vellen papier die onderverdeeld zijn in verschillende aantallen kaartjes.
Ook het aantal rijen en kolommen varieert. We beginnen met een vel dat bestaat uit slechts één kaart, dus met slechts één rij en één kolom. We maken het aantal rijen en kolommen stapje voor stapje groter en kijken of er een regelmaat te ontdekken valt.

Vul in tabel 1 het aantal kniplijnen in dat je moet maken als je eerst alle verticale lijnen knipt.
Kijk goed naar het aantal kniplijnen dat er iedere rij of kolom bijkomt.

Let op: De buitenranden van het vel hoeven nooit uitgeknipt te worden!
2p betekent 2 × p, pq betekent p × q

Kniplijnen

	aantal kolommen						
aantal rijen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**q**
1	0	1	2	3	4	5	q – 1
2	1	3	5	7	9	11	2q – 1
3	2	5	8	11	14	17	3q – 1
4	3	7	11	15	19	23	4q – 1
5	4	9	14	19	24	29	5q – 1
6	5	11	17	23	29	35	6q – 1
p	p – 1	2p – 1	3p – 1	4p – 1	5p – 1	6p – 1	pq – 1

tabel 1: eerst alle verticale lijnen knippen

4 **a** Hoeveel kaartjes zijn er bij p rijen en q kolommen? p × q kaartjes

b Wat heb je als aantal kniplijnen ingevuld bij p rijen en q kolommen? p × q – 1
(ook q × p – 1 is goed)

5 Wat is het aantal kniplijnen bij q rijen en p kolommen? q × p – 1
(is hetzelfde als p × q – 1)

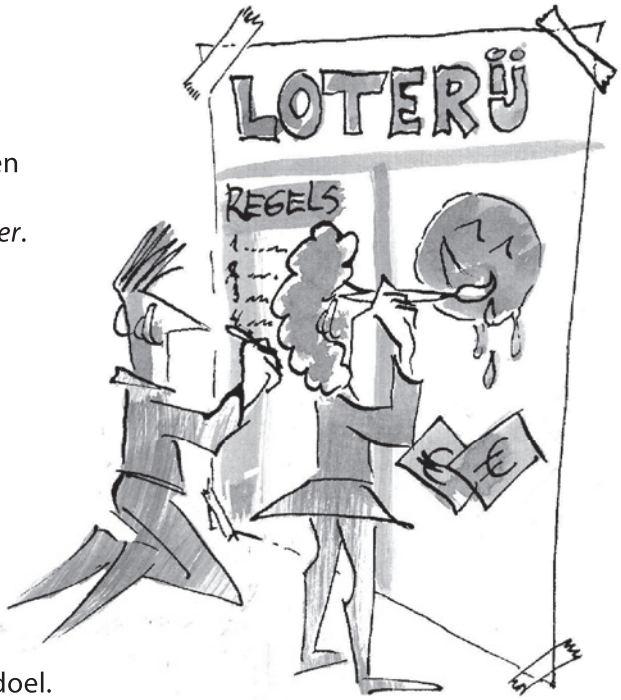
6 Wat wil dit zeggen over het verschil tussen eerst horizontaal of eerst verticaal knippen?
Het maakt niet uit of je eerst horizontaal knipt of eerst verticaal.
Het aantal kniplijnen is gelijk.

7 Nu kun je opdracht 2 maken met behulp van bovenstaande resultaten.
Heb je opdracht 2 al gemaakt, dan kun je je antwoorden ermee controleren.

Alle indelingen in p rijen en q kolommen bij opgave 1 geven p × q = 120 (het aantal kaartjes).
In alle gevallen is het aantal kniplijnen p × q – 1 = 119.

Toets 1

1 De loterijen uit Les 1 en Les 2 zullen verlies lijden als het aantal verkochte loten te groot is. Bedenk zelf regels voor een loterij met geldprijzen waarbij er geen verlies zal zijn.
Doe dit alleen of samen met een andere *topklasser*.

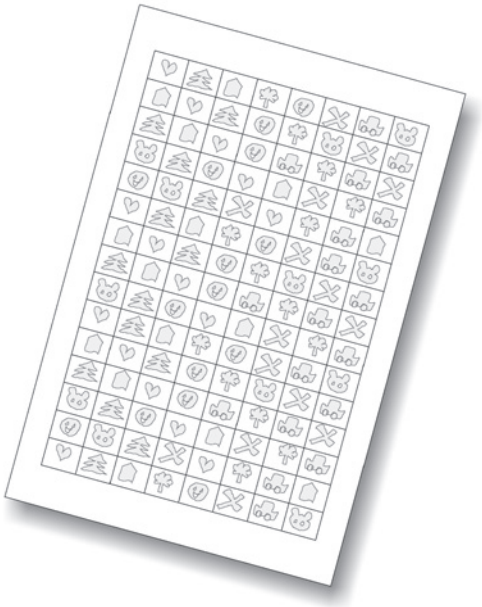


Gebruik de ruimte op deze bladzijde om aantekeningen te maken over je of jullie ideeën.
Maak vervolgens een reclameposter voor de loterij met daarop alle regels en voeg een of meer illustraties toe om de aandacht op de loterij te vestigen.
Verwerk in de regels voor de loterij de volgende uitgangspunten:

- Elk lot kost 10 euro.
- Elk aantal verkochte loten tot aan 500 levert een redelijke opbrengst op voor het goede doel.
- Voor deelnemers is er kans op aantrekkelijke geldprijzen.

Ter beoordeling van de leerkracht.

2 In Les 3 en Les 4 ging het over kaartjes uit een vel papier knippen. Je kon ontdekken dat het aantal zogenoemde kniplijnen bij p rijen en q kolommen p × q – 1 bedraagt. De buitenranden van de buitenste kaartjes werden daarbij niet meegeteld, omdat ze samenvielen met de rand van het vel.



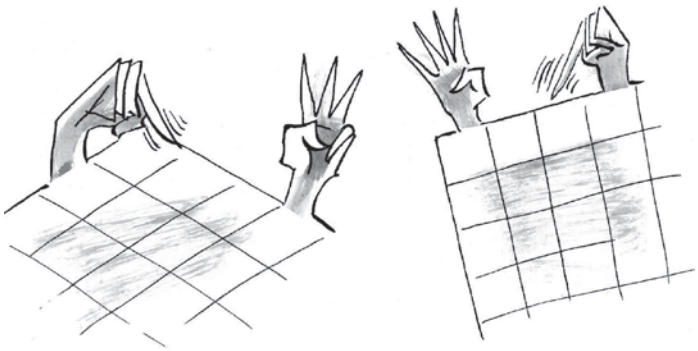
In bovenstaande afbeelding vallen de buitenranden van de buitenste kaartjes wel binnen het grotere vel. In de volgende opgaven moet je ervan uitgaan, dat alle buitenranden ook uitgeknipt worden.

a Wat is nu het kleinste aantal kniplijnen bij p rijen en q kolommen? p × q + 3. Zonder buitenranden was het p × q – 1, door de buitenranden zijn er 4 kniplijnen extra.

b Bedenk een indeling met meer dan één rij en meer dan één kolom, waarbij het aantal kniplijnen (inclusief de buitenranden) 80 bedraagt. Bij 7 rijen en 11 kolommen zijn er 7 × 11 + 3 = 80 kniplijnen. Bij 11 rijen en 7 kolommen is dat ook zo.

c Bij precies 100 kniplijnen is er niet zo'n rechthoekige indeling te bedenken met meer dan één rij en meer dan één kolom.

Noem 3 aantallen kniplijnen waarbij dat ook niet mogelijk is. Het is niet mogelijk als het aantal kniplijnen 'een priemgetal + 3' is. Bijvoorbeeld bij 10, bij 26 en bij 34 kniplijnen.



3 Hoeveel kniplijnen zijn er bij a rijen en b kolommen als elke rand van een kaartje als een aparte kniplijn geldt? Ofwel hoeveel afzonderlijke randjes zijn er bij a rijen en b kolommen?

Alle buitenrandjes tellen mee! Er zijn a × b kaartjes. Zet bij ieder kaartje 2 streepjes, 1 streepje door de linkerrand en 1 streepje door de bovenrand. Dat zijn precies 2 × a × b streepjes. Helemaal rechts zijn er a randen zonder streepje en helemaal onderaan zijn er b randen zonder streepje. Dat betekent dat er in totaal 2 × a × b + a + b randen zijn.

Les 5 de machtige twee

Roos staat bij opa Henny met in haar ene hand een viool en in de andere hand zes kaartjes. 'Waar zal ik mee beginnen opa, met mijn concertino of met de goocheltruc?' 'Laten we eerst het denkwerk doen', zegt opa, en hij gaat er eens goed voor zitten.

Roos geeft opa de kaartjes en zegt: 'Neem een getal onder de 64 in gedachten en kijk op welke van de zes kaartjes dat getal staat. Je mag het getal niet noemen, daar kom ik zelf wel achter.'
'Het getal staat alleen op deze twee kaartjes', zegt opa en hij laat Roos een kaartje zien waarop linksboven als kleinste getal een 4 staat en een ander kaartje waarop de 8 linksboven als kleinste getal staat. 'Twaalf', roept Roos uit, 'jij had twaalf in gedachten.'
'Precies je leeftijd', zegt opa. 'Slim van jou, hoor. Maar nu wil ik ook een truc laten zien.' Dat vindt Roos best en ze luistert vol aandacht naar opa Henny.

'Jij noemt mij ook een getal, maar je mag de zes kaartjes niet aan mij laten zien.
Ik zal je dan zonder te kijken vertellen op welke kaartjes jouw getal staat.'
'Ik kan jouw leeftijd niet kiezen', zegt Roos, 'het gaat maar tot 64. Ik kies 37.'
'Prima', zegt opa snel, '37 staat op drie kaartjes en wel op het kaartje met linksboven het getal 1, op het kaartje met linksboven de 4 en op het kaartje met linksboven 32.'
Roos onderzoekt meteen of het klopt wat opa zegt.
'Je hebt gelijk, opa, hoe weet jij dat?'
'Dat weet ik door de machtige twee', zegt opa geheimzinnig en hij pakt pen en papier.

'Eerst moet ik je iets uitleggen over die machtige 2!', zegt opa en hij schrijft op het papier:

2

.....

$2 \times 2 \times 2$
$2 \times 2 \times 2 \times 2$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

.....

'Wat moet er op het eerste rijtje puntjes staan?', vraagt opa.

Roos weet nog uit deel 1 van de Topklassers Wiskunde, dat 2×2 ook wel *twee kwadraat* genoemd wordt en dat het ook wordt geschreven als 2^2.

Opa vertelt Roos dat het zo steeds verder gaat:
'$2 \times 2 \times 2$ zijn drie termen twee die je met elkaar vermenigvuldigt, dat kun je ook schrijven als 2^3 en je spreekt dat uit als twee tot de macht drie of ook wel twee tot de derde.
Omdat je steeds tweeën met elkaar vermenigvuldigt, spreken we van machten van twee.
Het getalletje rechtsboven geeft aan hoeveel termen twee er zijn, bij 2^2 zijn dat er twee en bij 2^3 gaat het om drie termen twee.'

'Wat moet er op het laatste rijtje puntjes staan', vraagt opa, 'na twee tot de vijfde?
Hoe groot is dat getal, hoe kun je het anders schrijven en hoe spreek je dat uit?'

1 Roos weet het antwoord. Jij ook? $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$. Je kunt dit schrijven als 2^6
Je spreekt het uit als twee tot de macht zes of twee tot de zesde.

2 Maak de rijen hieronder eerst aan de rechterkant verder af.
Onder de 2 staat 2^1, immers er is één term 2.

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}

Wat verwacht je dat er aan de linkerkant staat? Kijk goed naar de regelmaat in de rij.

Van links naar rechts is steeds het dubbele, dus van rechts naar links is steeds de helft. Daarom komt er in de bovenste rij vooraan een 1 te staan. Het is een afspraak om de 1 als 2° te beschouwen. (misschien helpt het om hierbij te denken aan nul termen twee, pas bij de eerste keer verdubbelen, 2 × 1, ontstaat er een 2)

De rij gaat aan de rechterkant door zo ver je maar wilt.

3 Hoe groot is 2^{12}? $2^{12} = 1024 \times 2 \times 2 = 4096$

Opa vertelt Roos dat hij de twee zo machtig vindt omdat je met machten van twee alle hele getallen kunt maken. Kijk maar naar de getallen uit de goocheltruc.

4 Vul de ontbrekende machten in: $12 = 8 + 4 = 2^{3} + 2^{2}$ en $37 = 32 + 4 + 1 = 2^{5} + 2^{2} + 2^{0}$.

5 Schrijf de volgende getallen als combinatie van machten van twee, elke macht mag maar één keer gebruikt worden. (dus 9 = 4 + 4 + 1 mag niet, wel 9 = 8 + 1)

7 = $4 + 2 + 1 = 2^2 + 2^1 + 2^0$

17 = $16 + 1 = 2^4 + 2^0$

24 = $16 + 8 = 2^4 + 2^3$

90 = $64 + 16 + 8 + 2 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^1$

59 = $32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0$

132 = $128 + 4 = 2^7 + 2^2$

6 Probeer de getallen uit opgave 5 op een andere manier als combinatie van machten van twee te schrijven. Elke macht mag ook nu maar één keer gebruikt worden.

Wat valt je op? Als geen enkele macht van 2 meer dan één keer gebruikt mag worden, dan is er voor elk getal precies één manier om dat getal te schrijven als combinatie van machten van 2.

Wat je nu hebt ontdekt, is heel belangrijk voor de goocheltruc van Roos.
Les 6 laat zien hoe je zelf de kaartjes voor deze truc kunt maken. Maar misschien heb jij de aanwijzingen in Les 6 niet nodig en wil je helemaal zelf het geheim van de truc ontdekken...
Ondertussen zit opa Henny al naar het concertino van Roos te luisteren.

Les 6 De goocheltruc

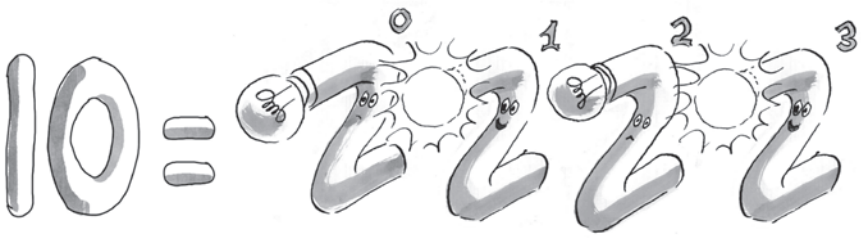
In Les 5 liet Roos opa Henny een goocheltruc zien. Opa wist maar al te goed wat die truc met machten van twee te maken had. Opa vertelde Roos dat je met machten van twee alle hele getallen kunt maken.

1 Welke machten van twee heb je nodig om alle hele getallen tot en met 1000 te kunnen maken?

Bij het maken van een getal mag je iedere macht van twee hooguit één keer gebruiken. .....

De machten 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8 en 2^9.

Volgens opa kan dat met de eerste tien machten van twee. (2° ook meegeteld) 'Vergelijk de machten van twee met lampjes', zo zegt hij, 'als de macht meedoet om het getal te maken, dan is het lampje aan (een 1), en als de macht niet meedoet, dan is het lampje uit (een 0).'



2 Vul alle nullen en enen in voor de getallen 4, 5, 6, 7, 997, 998, 999 en 1000.

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
↓										
997	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
998	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
999	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1000	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1

Op deze manier (bijvoorbeeld op ruitjespapier) kun je van alle getallen tot 64 uitzoeken hoe je ze kunt opbouwen uit machten van twee. Mogelijk ontdek je dan ook dat je voor ieder getal precies één manier kunt vinden om de nullen en enen te plaatsen. Probeer maar eens om het getal 16 te maken met behulp van de eerste vier lampjes (1, 2, 4, en 8). Lukt dat?

Nee, dat lukt niet. 1 + 2 + 4 + 8 = 15 en geen van de getallen mag meer dan één keer gebruikt worden. Je moet voor 16 dus een 'nieuw' lampje inschakelen.

Heb jij nu genoeg informatie om zelf kaartjes voor de goocheltruc te maken?
Zo ja, vraag dan aan je leerkracht of je de kaartjes op de computer mag maken.
Een truc die mooi vormgegeven is, maakt nog meer indruk.
Wil je liever enkele aanwijzingen, dan vind je die op de volgende pagina.

Hoe maak je de goocheltruc met machten van 2?

de kaartjes
In de truc gebruik je kaartjes met getallen.
Eerst ga je onderzoeken welke getallen er op de kaartjes moeten staan.
Doe je de truc met getallen onder de 64, dan kun je voor die getallen een schema maken.

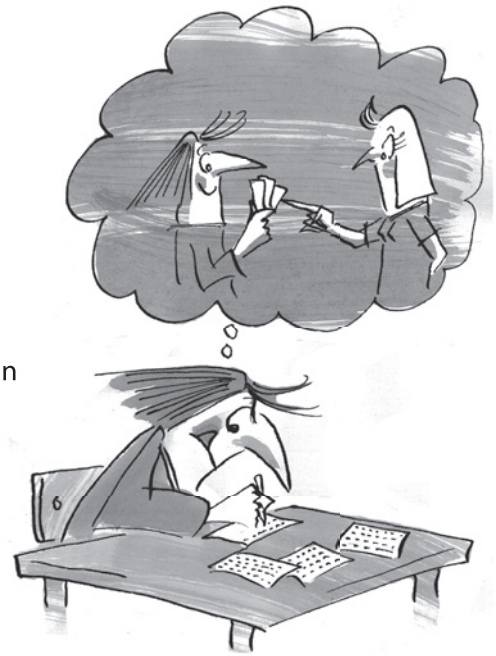
3 Welke lampjes (machten van twee) heb je dan nodig? En hoeveel kaartjes?

Voor de truc met getallen onder de 64 heb je nodig: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4 en 2^5.

Dat betekent zes kaartjes. Met deze zes kaartjes kun je de truc doen.

Bij iedere macht maak je een kaartje waarop je dat getal linksboven zet. Op het kaartje met linksboven de 1 zet je verder alle andere getallen onder de 64 waarbij het 1-lampje brandt. Dat zijn dus alle getallen waarbij je de 1 nodig hebt om het getal te schrijven als combinatie van machten van twee. In de afbeelding hieronder is al een deel van de getallen ingevuld.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63



Op het kaartje met de 2 linksboven zet je alle getallen waarbij het 2-lampje brandt. Op soortgelijke manier maak je ook een kaartje voor de 4 (met daarop de getallen waarbij het 4-lampje brandt), een kaartje voor de 8, een kaartje voor de 16 en een kaartje voor de 32.

de truc
Vraag de persoon met wie je de truc doet om in gedachten een getal onder de 64 te kiezen. Vraag hem of haar ook om de kaartjes aan te wijzen waarop dat getal staat. Jij kijkt dan razendsnel naar de getallen linksboven.

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

4 Hoe gaat de truc nu verder? Je legt de kaartjes die aangewezen zijn apart.
Tel nu de getallen op die linksboven staan.
Het getal dat je zo vindt, is het gezochte getal.

Misschien wil jij liever de truc maken voor getallen onder de 128. Dat kan natuurlijk ook.

5 Hoeveel kaartjes moet je dan maken? En hoeveel getallen staan er dan op ieder kaartje?
Je moet dan zeven kaartjes maken. Nog een extra kaartje met 64 linksboven.
Op ieder kaartje staan 64 getallen.

Les 7 Slingers

Wieke en Koen zijn druk in de weer met de voorbereidingen voor het feest dat komen gaat. Wieke oefent achter de piano een aantal vrolijke deuntjes en Koen heeft net slingers gekocht. 'Hoe zullen we de slingers ophangen?', vraagt Koen. 'We gaan het onszelf niet te moeilijk maken', zegt Wieke, 'op elk van de vier muren maken we bovenaan één ophangpunt waar een slinger begint en waar een andere eindigt.' 'Als dat maar lukt, de slingers kunnen per stuk maximaal vijf meter overbruggen', weet Koen te vertellen. Vervolgens gaan de twee aan de gang met het opmeten van de kamer. Die blijkt zeven bij zeven meter in het vierkant te zijn. Bovendien is het plafond niet zo hoog, dus willen Wieke en Koen de slingers zo ophangen, dat niemand tegen de slingers aan hoeft te lopen. Dus de ruimte tussen de vier slingers moet zo groot mogelijk zijn.

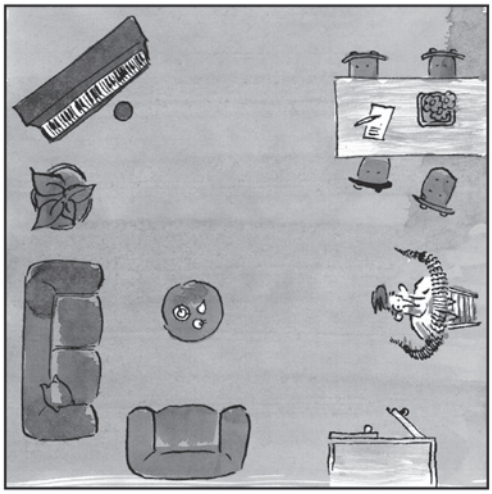
1 Hoe kunnen Wieke en Koen de slingers volgens jou het beste ophangen?
Teken de slingers in de lege plattegrond en zet de afmetingen erbij.

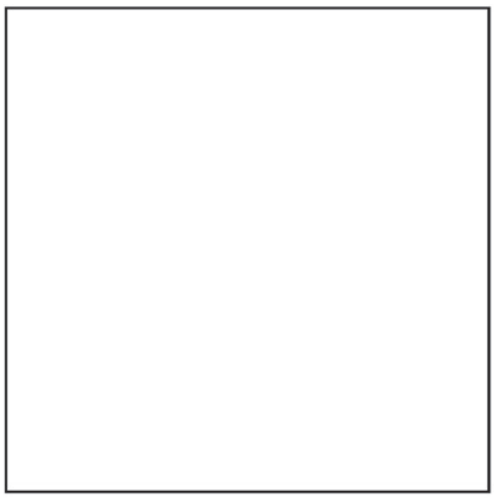
Ter beoordeling van de leerkracht.
Vergelijk het antwoord bij opgave 7 van Les 8.

Eerst nog even de gegevens op een rijtje:
- de kamer is vierkant, 7 bij 7 meter
- op elk van de vier muren komt één ophangpunt
- de afstand tussen de ophangpunten is ten hoogste 5 meter, meer mag echt niet!
- het stuk tussen de vier slingers heeft een maximale oppervlakte

7 m

7 m

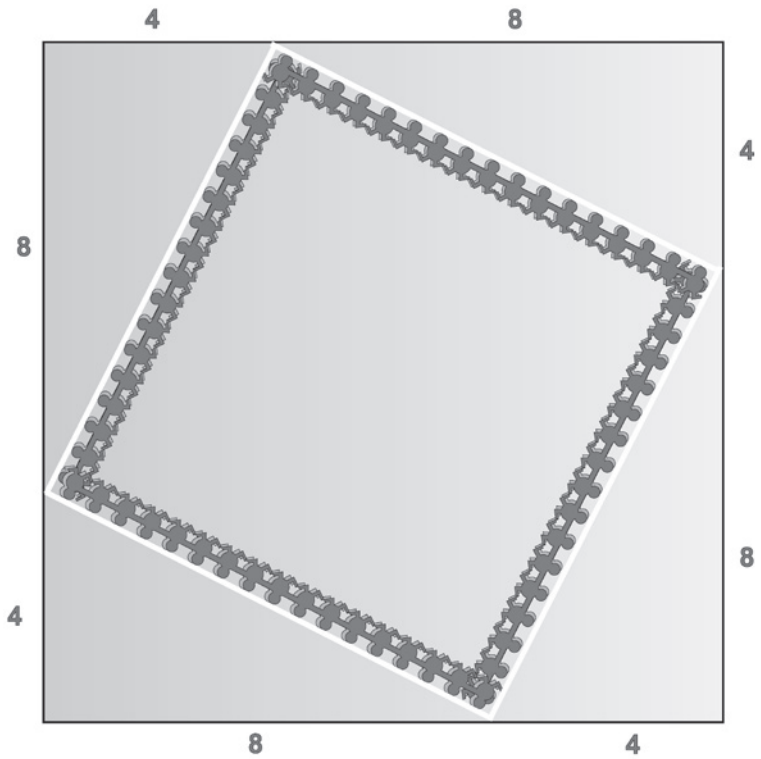




7 m

Op de volgende pagina staan enkele opdrachten die je kunnen helpen bij het vinden van oppervlaktes. Misschien vind je het prettiger om die eerst te maken.

In de tekening hiernaast zie je een andere (voor de duidelijkheid) lege kamer van 12 bij 12 meter. Vier slingers zijn opgehangen op een afstand van vier meter van de hoekpunten van de kamer. We zullen nu een manier laten zien om de oppervlakte van de vierhoek tussen de slingers te bepalen. Daarbij gebruiken we de vier driehoeken erbuiten. De lengte van de slingers hebben we niet nodig.



2 De slingers vormen met de wanden van de kamer vier driehoeken.

Hoe groot is de oppervlakte van die driehoeken samen? De oppervlakte van één driehoek is $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$ m². De oppervlakte van de vier driehoeken samen is 64 m².

3 Hoe groot is de oppervlakte van de hele kamer? $12 \times 12 = 144$ m².

4 Hoe groot is dus de oppervlakte van de vierhoek tussen de slingers? De oppervlakte van de hele kamer min de totale oppervlakte van de vier driehoeken: $144 - 64 = 80$ m².

5 Welke vorm heeft die vierhoek? De vierhoek tussen de slingers is een vierkant.

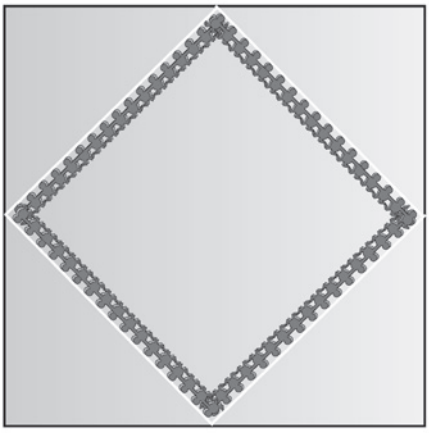
6 Schat de afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten, tussen welke twee hele getallen (in meters) ligt die afstand? Hoe lang denk je dat de slingers ongeveer zijn? De afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten ligt tussen 8 en 9 m. Als het 9 m was, zou de oppervlakte van het vierkant 81 m² zijn. Dat is iets meer dan de werkelijke oppervlakte. De slingers zullen zelfs langer dan 9 m zijn. (ze buigen iets door)

Les 8 De stelling van Pythagoras

Inmiddels hebben Wieke en Koen uit Les 7 hun slingers opgehangen. Op de tekening hiernaast kun je zien hoe zij dit gedaan hebben. De slingers hangen precies vanuit het midden van elke muur. De vierkante kamer is zeven meter lang.

1 Wat vind jij van de oplossing van Wieke en Koen?

Hierbij gaat het om je mening. Het is vooral belangrijk welke argumenten je gebruikt. De oplossing van Wieke en Koen is een goede. Er is echter een oplossing mogelijk met een nog grotere oppervlakte tussen de slingers.



2 Hoe groot is de oppervlakte van de vierhoek tussen de vier slingers? Welke vorm heeft die vierhoek?

De vierhoek tussen de slingers is een vierkant en heeft een oppervlakte van 24,5 m^2 (de helft van de oppervlakte van de hele kamer).

3 Is de afstand tussen twee opeenvolgende ophangpunten van de slingers meer dan vijf meter, minder dan vijf meter of precies vijf meter? Leg ook uit waarom dat zo is.

De afstand tussen twee ophangpunten is minder dan vijf meter. Bij precies vijf meter zou de oppervlakte van het tussenliggende vierkant 5 x 5 = 25 m^2 moeten zijn. En bij meer dan vijf meter zou die oppervlakte nog groter zijn.

Er is een manier om de slingers op te hangen waarbij die afstand wel precies vijf meter is en waarbij de vier slingers ook een vierkant vormen. Ook dan hebben alle vier de omliggende driehoeken dezelfde vorm en zijn ze even groot.

4 Hoe groot is de oppervlakte tussen de vier slingers in dat geval?

In dat geval is de oppervlakte wel 5 x 5 = 25 m^2.

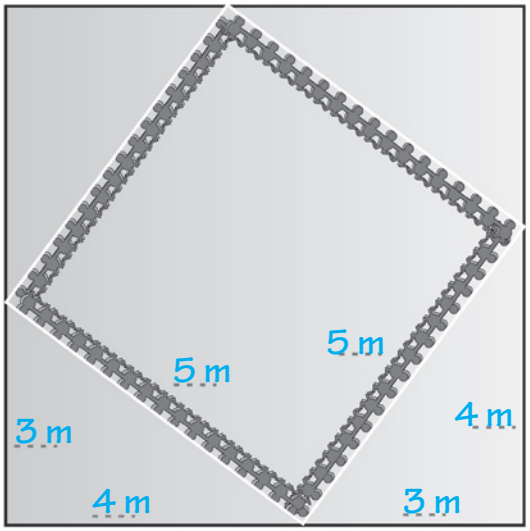
5 Hoe groot is dan de oppervlakte van elk van de vier driehoeken eromheen?

Er blijft 49 – 25 = 24 m^2 over voor de vier driehoeken, die alle even groot zijn. Elke driehoek heeft dus een oppervlakte van 24 : 4 = 6 m^2.

6 Met de gegevens die we hebben, kunnen we de lengte en breedte van de vier driehoeken vinden. We weten om te beginnen hoe lang de lengte en de breedte van zo'n driehoek samen zijn. Vervolgens weten we ook de oppervlakte van zo'n rechthoekige driehoek.
Welke lengte en breedte hebben de rechthoekige driehoeken?

De lengte l en de breedte b van de driehoek zijn samen even lang als de totale lengte van de kamer. Dus l + b = 7 m. De oppervlakte van de rechthoekige driehoek is $\frac{1}{2}$ x l x b = 6 m^2, dus lengte x breedte moet 12 zijn. Dat kan als de driehoeken een lengte van 4 m en een breedte van 3 m hebben.

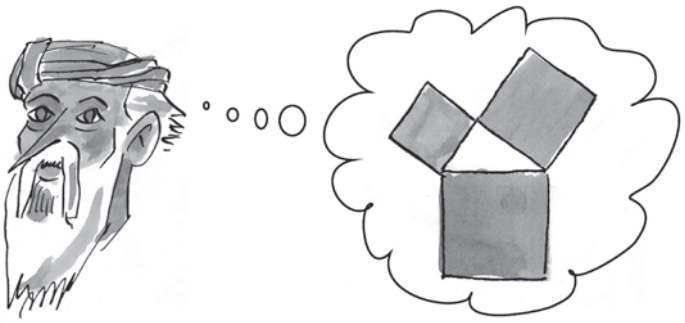
7 Hiernaast zie je de bedoelde oplossing.
De slingers vormen een vierkant en de afstand tussen de ophangpunten is precies vijf meter.
De tekening is op schaal.



Zet op de stippellijntjes de werkelijke afmetingen in de tekening.

Zonder nu meteen een volledig bewijs te willen geven, merken we hier op dat we in de buurt zijn gekomen van ...

de stelling van Pythagoras!



Kijk maar:

De oppervlakte van de kamer is $\mathbf{7 \times 7\ m^2 = (3 + 4) \times (3 + 4)\ m^2}$.
Dat kun je ook schrijven als $\mathbf{3 \times 3 + 4 \times 4 + 3 \times 4 + 4 \times 3\ m^2}$.
Haal je de oppervlakte van de vier driehoeken eraf, dat is $\mathbf{4 \times \frac{1}{2}\,(3 \times 4)}$ **ofwel** $\mathbf{2 \times (3 \times 4)\ m^2}$,
dan hou je $\mathbf{3 \times 3 + 4 \times 4\ m^2}$ over als oppervlakte van het vierkant tussen de slingers.
Dus van de ene kant is de oppervlakte van dat vierkant $\mathbf{3 \times 3 + 4 \times 4\ m^2 = 3^2 + 4^2\ m^2}$.
Van de andere kant is het vierkant 5 m lang, dus de oppervlakte is $\mathbf{5 \times 5\ m^2 = 5^2\ m^2}$.

Hieruit volgt: $\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}$

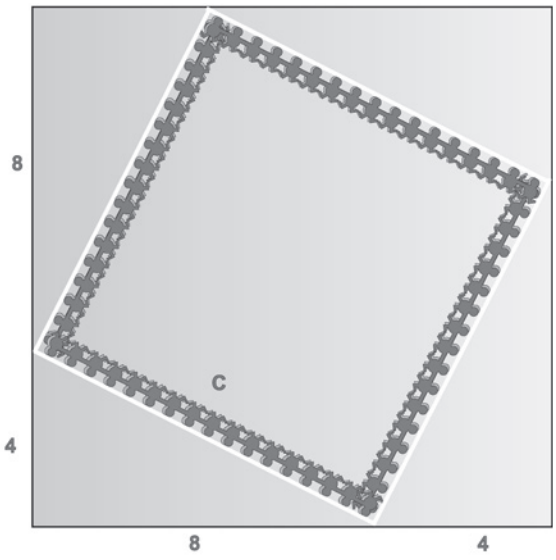
De Griekse wiskundige Pythagoras stelde een verband vast dat voor alle rechthoekige driehoeken geldt. Zijn stelling wordt vaak gebruikt om met behulp van de lengtes van de rechthoekszijden de lengte van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek te berekenen.

Kijk nog maar eens naar de kamer van 12 bij 12 meter in Les 7. De rechthoekige driehoek linksonder heeft een zijde van 4 meter en een zijde van 8 meter.

8 Hoe groot is de oppervlakte van het vierkant tussen de slingers?

Die oppervlakte is 80 m^2 .

Zie de antwoorden bij de opgaven 2, 3 en 4 van Les 7.



9 Hoe groot is de lengte c van de schuine zijde van de driehoek linksonder?
Is dat meer of minder dan 9 meter?

$c \times c = 80\ m^2$, dus $c = \sqrt{80}$ m. $\sqrt{80} \times \sqrt{80} = 80$ en $9 \times 9 = 81$.

Dus $\sqrt{80}$, de lengte van de schuine zijde van de driehoek, is minder dan 9 m.

In het bewijs van $4^2 + 8^2 = c$ kun je gebruikmaken van de volgende berekening:

$12 \times 12\ m^2 = (4 + 8) \times (4 \times 8)m^2 = 4 \times 4 + 8 \times 8 + 2 \times (4 \times 8)m^2$!

Ook hier kun je de oppervlakte van het kleine vierkant op twee manieren zien.
Met behulp van de driehoeken op soortgelijke wijze als bij de kamer van 7 bij 7 m, als $4^2 + 8^2$, en met behulp van de lengte c als c^2. Probeer maar eens. Dan bewijs je daarmee dat $4^2 + 8^2 = c^2$!

Toets 2

Mirjam doet met haar moeder de goocheltruc uit Les 6.
Mirjam heeft eerst kaartjes gemaakt voor de getallen vanaf 1 tot en met 31.
Haar moeder heeft een getal in gedachten genomen. Het getal staat op drie kaartjes, op het kaartje met linksboven de 1, op het kaartje met de 8 en op het kaartje met de 16.

1 **a** Welk getal heeft moeder in gedachten? Het getal 25.
De getallen linksboven op de kaartjes bij elkaar geven 1 + 6 + 18 = 25.

b Welke kaartjes zou moeder aanwijzen als ze het getal 22 had gekozen?
De kaartjes met de 2, 4 en 16 linksboven. 2 + 4 + 16 = 22.

c Hoeveel kaartjes heeft Mirjam gemaakt? Mirjam heeft 5 kaartjes gemaakt.
De kaartjes hebben achtereenvolgens de getallen 1, 2, 4, 8 en 16 linksboven.

d Mirjam legt de kaartjes apart waar het getal 19 op staat.
Welk getal staat er *niet* op die kaartjes, maar wel op alle andere kaartjes? Het getal 12.
19 = 1 + 2 + 16 en staat dus op de kaartjes met linksboven 1, 2 en 16.
De kaartjes met linksboven 4 en 8 zijn over.
12 = 4 + 8 en staat alleen op die twee kaartjes.

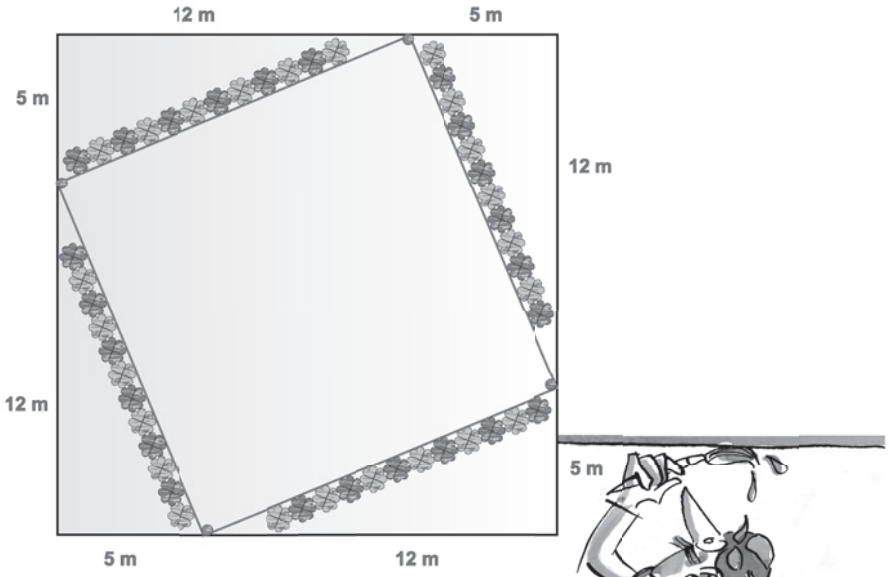
2 Mirjam heeft daarna de kaartjes gemaakt voor de truc met getallen tot en met 63.

a Kan Mirjam de kaartjes gebruiken die ze voor de truc met getallen tot 32 maakte?
Licht je antwoord toe. Mirjam moet nieuwe kaartjes maken met meer getallen erop. Op elk kaartje staan nu 32 getallen in plaats van 16. Mirjam kan wel de getallen van de oude kaartjes overnemen, want die komen ook op de nieuwe kaartjes te staan.

b Mirjam legt de kaartjes apart waar het getal 19 op staat.
Welk getal staat er *niet* op die kaartjes, maar *wel* op alle andere kaartjes? Het getal 44.
19 = 1 + 2 + 16 en staat dus op de kaartjes met linksboven 1, 2 en 16.
44 = 4 + 8 + 32 en staat op de andere drie kaartjes (linksboven 4, 8 en 32).

c Er zijn nog meer van zulke getallenduo's. Op ieder kaartje staat precies één van de twee getallen van zo'n duo, of het ene of het andere. Nooit allebei tegelijk of geen van beide getallen. Probeer nog drie van zulke getallenduo's te vinden. 1 en 62 is zo'n getallenduo. 1 staat op het kaartje met linksboven de 1, 62 staat op de andere vijf kaartjes. (2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62) Elke twee getallen die bij elkaar opgeteld 63 zijn, vormen zo'n getallenduo. Bijvoorbeeld 2 en 61, en ook 3 en 60. Als je beide getallen van zo'n duo als som van machten van 2 schrijft, dan kunnen ze alleen opgeteld 63 zijn als precies 1, 2, 4, 8, 16 en 32 één keer voorkomen. Op ieder kaartje moet dus precies één van de twee duogetallen staan.

3 Net als in de lessen 7 en 8 is het in deze toets ook feest. Het feest vindt plaats in een zaal van een kasteel dat binnenkort een grondige opknapbeurt krijgt. Daarom kwam een kunstenaar op het idee om geen slingers op te hangen, maar de slingers op het plafond te schilderen.
In de afbeelding hieronder zie je het plafond van de feestzaal na het schilderen.

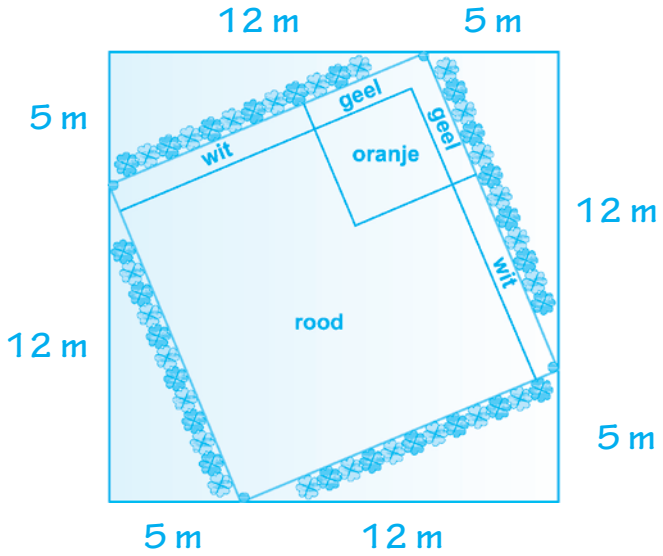


a De kunstenaar deed erg zijn best.
Per vier meter slinger gebruikte hij 125 ml verf.
Hoeveel verf gebruikte de kunstenaar voor de vier slingers samen?
De oppervlakte van de zaal is 17 x 17 = 289 m².
De oppervlakte van elke driehoek is $\frac{1}{2}$ x 5 x 12 = 30 m².
De oppervlakte van het vierkant tussen de vier slingers is 289 m² – 120 m² = 169 m². Elke slinger is dus √169 m = 13 m lang. De kunstschilder schilderde 4 slingers van 13 m en gebruikte daarbij 125 ml verf per 4 meter.
De schilder gebruikte 13 x 125 ml = 1625 ml verf. (1,625 liter)

Dezelfde kunstenaar schilderde in het vierkant tussen de slingers nog twee vierkante taarten, een rode met aardbeien en een gele met banaan. Hij ging er vanuit dat de meeste bezoekers van aardbeien houden, dus maakte hij de rode taart groot, wel 144 m², en de gele taart klein, 25 m². Voordat de kunstenaar begon met schilderen was het plafond wit.

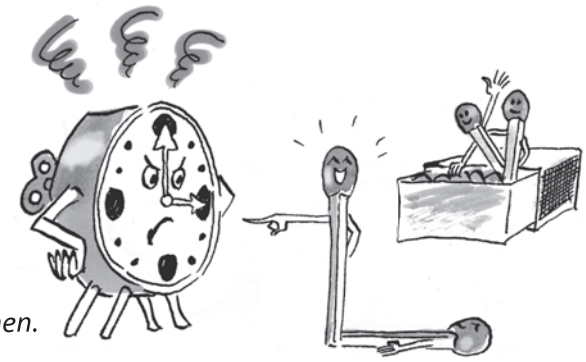
b Teken de twee taarten in het gebied tussen de vier slingers.
Het maakt niet uit op welke plaats in het vierkant je de twee taarten tekent.
Je kunt bijvoorbeeld in de ene hoek de rode taart tekenen en in de hoek ertegenover de gele taart, of de ene taart in het midden van de andere taart, elke keuze is goed. Met oranje kun je aangeven waar de rode en de gele taart elkaar overlappen.

Leg uit waarom het oranje stuk taart (de overlapping) even groot is als het deel van het vierkant tussen de slingers dat wit blijft. Klopt dat ook in jouw tekening? Er zijn meerdere manieren waarop de taarten getekend kunnen worden. Een van die manieren is de volgende:



De oppervlakte van het vierkant tussen de vier slingers is precies even groot als de oppervlaktes van de twee taarten bij elkaar:
$5^2 + 12^2 = 25 + 144$ m^2 = 169 m^2.
Uit het antwoord bij opgave 3a volgt dat die oppervlakte ook gelijk is aan 13^2 m^2 (=169 m^2).
Als de twee taarten niet zouden overlappen, zou er helemaal geen rest zijn.
Door de vierkante vorm is er wel overlapping. Het gedeelte overlapping is automatisch even groot als het gedeelte waar geen taart is, elke vierkante meter overlapping is ook een vierkante meter rest. Daarom is het oranje deel even groot als het witte deel. In het getekende voorbeeld is er 16 m^2 oranje en 16 m^2 wit.

Les 9 Het tijdspel deel 1

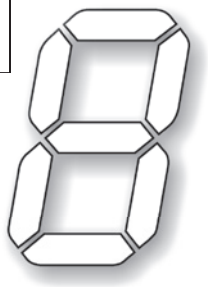


Deze les gaat over een tijdspel. Het is de bedoeling dat jij het spel met andere kinderen gaat spelen. Maar dat is niet alles. Het spel is nog niet af en jij kunt meehelpen om het te verbeteren. Vertel je leerkracht wat je deze les wilt gaan doen en vraag of dat vandaag uitkomt. Vraag ook om een doosje lucifers. De lucifers (of ijsstokjes) heb je nodig om digitale cijfers te vormen.

De les bestaat uit een aantal stappen:

stap 1	Beantwoord als voorbereiding enkele vragen over digitale cijfers.
stap 2	Lees de spelregels nauwkeurig, zodat jij het spel goed snapt.
stap 3	Leg het spel uit aan drie andere kinderen.
stap 4	Speel met elkaar het spel twee of drie keer.
stap 5	Bespreek wat er niet klopt aan het spel of wat het spel beter kan maken.
stap 6	Ga zelf (of samen met de anderen) extra of betere spelregels opstellen.
stap 7	Speel het spel met de nieuwe regels.

Veel spelplezier bij het spelen én verbeteren!

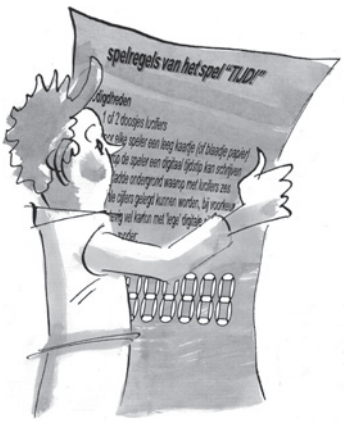


stap 1
De digitale cijfers op een klok zijn vaak opgebouwd uit kleine staafjes.
In het voorbeeld hiernaast zie je zo'n cijfer acht.

1 Hoeveel lucifers heb je nodig om op deze manier alle cijfers van 0 tot en met 9 naast elkaar te leggen? Je kunt ze even tekenen op een kladblaadje. Er zijn 49 lucifers nodig.
Uitleg: 6 (voor het cijfer 0) + 2 (voor 1) + 5 (voor 2) + 5 (voor 3) + 4 (voor 4) + 5 (voor 5) + 6 (voor 6) + 3 (voor 7) + 7 (voor 8) + 6 (voor 9) = 49

2 Met hoeveel lucifers leg je op de digitale manier vier over half een 's middags? De puntjes tussen de uren en de minuten (zoals bijvoorbeeld bij 16:05 uur) hoef je niet met lucifers te leggen. En met hoeveel lucifers leg je vier over half een 's nachts? (alle nullen zijn te zien)
Vier over half een 's middags: 12:34 uur, met 16 lucifers
Vier over half een 's nachts: 00:34 uur, met 21 lucifers

3 Voor welke digitale tijd heb je de meeste lucifers nodig?
En voor welke het minste aantal? De meeste lucifers heb je nodig voor 08:08 uur, 8 over 8 's morgens, dat leg je met 6 + 7 + 6 + 7 = 26 lucifers. Het minste aantal is nodig voor 11:11 uur, 11 minuten over 11 in de morgen, dat leg je met 4 × 2 = 8 lucifers.



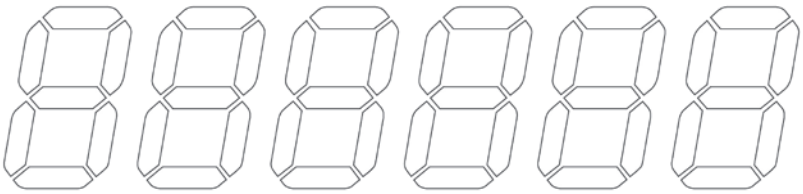
Controleer in het antwoordenboek de antwoorden die je gegeven hebt. Dat kan misverstanden voorkomen bij de volgende stappen.

stap 2
Lees de spelregels op de volgende pagina.

spelregels van het spel 'TIJD!'

Benodigdheden

- *1 of 2 doosjes lucifers*
- *Voor elke speler een leeg kaartje (of blaadje papier) waarop de speler een digitaal tijdstip kan schrijven*
- *Een gladde ondergrond waarop met lucifers zes digitale cijfers gelegd kunnen worden, bij voorkeur een stevig vel karton met 'lege' digitale cijfers, zoals hieronder:*



Het spel

Elke speler schrijft in het geheim een digitale tijd op zijn kaartje en legt dat kaartje omgekeerd voor zich op tafel. De lucifers worden op een stapel gelegd waar iedere speler van mag pakken. De bedoeling is om zo snel mogelijk met de lucifers de cijfers te vormen die bij je eigen geheime tijd horen.

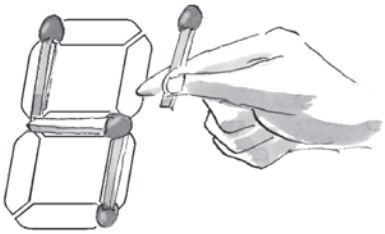
Die cijfers worden gevormd doordat de spelers om beurten één lucifer op een lege 'luciferplek' mogen leggen. Dat hoeft niet op een bepaalde volgorde, elke lege plek mag opgevuld worden. De kunst is nu ervoor te zorgen zelf de laatste lucifer van een cijfer te leggen. Zodra je door een lucifer te leggen een cijfer compleet maakt, roep je 'tijd!' en mag jij dat cijfer op de zichtbare kant van je kaartje noteren. Vervolgens worden alle lucifers van dat cijfer weer op de stapel gelegd en gaat het spel verder.

Ook door een lucifer weg te nemen, kun je een cijfer compleet maken. Wie aan de beurt is, mag er voor kiezen een lucifer weg te nemen in plaats van er een neer te leggen. Als je dat doet, mag je pas in de volgende beurt weer een lucifer neerleggen. Maar let op: een lucifer die net is neergelegd, mag niet meteen door de volgende speler worden weggenomen!

Winnaar is de speler die het eerst alle vier de cijfers heeft verzameld die bij zijn geheime tijd horen. De volgorde waarin de cijfers verzameld worden, is niet belangrijk.

stap ❶ tot en met stap ❷

Is het spel duidelijk, ga dan verder met stap 3 tot en met stap 7.
Is het spel niet duidelijk, vraag dan of je er met een klasgenoot naar mag kijken, twee weten vaak meer dan één.



Denk bij stap 5 bijvoorbeeld aan zaken als:

- Maakt het uit welke geheime tijd je opschrijft, zijn alle tijden even moeilijk?
- Wordt het spel beter met de regel dat je een lucifer mag verplaatsen naar een andere plek, in plaats van dat je een lucifer weg mag nemen?
- Mag je ook 'tijd!' roepen, wanneer een andere speler een cijfer legt?
- Hoeveel lege cijfers gebruik je bij vier spelers, hoeveel bij drie of vijf spelers?

Een echte onderzoeker herhaalt de stappen 5, 6 en 7 tot hij of zij tevreden is.
Ben je tevreden over de nieuwe regels? Zet dan als je wilt ook stap 8.

stap ❽

Stuur de spelregels die je hebt bedacht naar uitgeverij ThiemeMeulenhoff.

Les 10 Het tijdspel deel 2

In deze les gaan we door op het tijdspel uit Les 9. Er kan bijvoorbeeld discussie ontstaan over het aantal lucifers. Misschien was dat in jouw groepje ook zo, maar misschien ging het bij jullie wel heel anders.

Appie, Chrisje, Nikkie en Jurgen vragen zich af of het moeilijker is om te winnen, als je cijfers uit meer lucifers bestaan.

Appie en Chrisje denken van wel. Voor een 9 heb je meer beurten nodig dan voor een 7. Nikkie en Jurgen denken dat het juist een voordeel kan zijn als je veel lucifers nodig hebt. Er worden steeds nieuwe lucifers aangelegd en je kunt langer geheim houden naar welke cijfers je zoekt.

1 Appie en Nikkie stellen voor om alle tijdstippen vanaf 00.00 uur tot en met 23.59 uur in groepen te verdelen. Tijdstippen die met eenzelfde aantal lucifers gelegd worden, komen bij elkaar in één groep. Jurgen en Chrisje zetten van elke groep de gegevens op papier.

a Hoeveel tijdstippen moeten er verdeeld worden? 24 x 60 = 1440 tijdstippen

b Schrijf van elke groep een tijdstip op. Er is een groep met één tijdstip van 8 lucifers: 11:11 uur. De groep met 9 lucifers per tijdstip bevat twee tijdstippen: 17:11 uur en 11:17 uur. De groep met 10 lucifers per tijdstip bevat 14:11 uur (en ook 11:41 uur, 11:14 uur en 17:17 uur). Voorbeelden bij de andere groepen:

11 lucifers: 12:11 uur	15 lucifers: 18:14 uur	19 lucifers: 18:22 uur	23 lucifers: 22:08 uur
12 lucifers: 16:11 uur	16 lucifers: 18:12 uur	20 lucifers: 18:26 uur	24 lucifers: 02:08 uur
13 lucifers: 18:11 uur	17 lucifers: 18:16 uur	21 lucifers: 18:06 uur	25 lucifers: 06:08 uur
14 lucifers: 18:17 uur	18 lucifers: 18:18 uur	22 lucifers: 18:08 uur	26 lucifers: 08:08 uur.

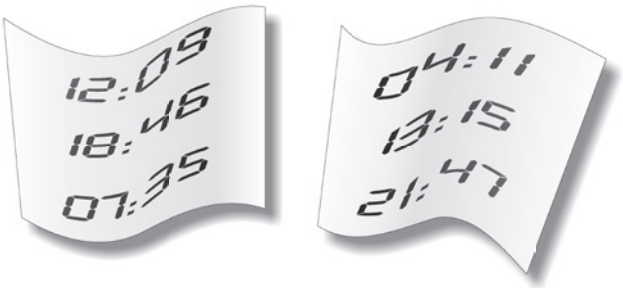
c Beredeneer waarom er minstens één groep is met meer dan 100 tijdstippen. Dat kan op meerdere manieren, bijvoorbeeld: van de 19 groepen bevatten de 'buitenste' groepen weinig tijdstippen. Met 8, 9, 10, 25 of 26 lucifers kun je 17 tijdstippen leggen.

8: 11:11 uur;
9: 17:11 uur en 11:17 uur;
10: 11:14 uur, 11:41 uur, 14:11 uur en 17:17 uur;
25: 00:08 uur, 06:08 uur, 09:08 uur, 08:00 uur, 08:06 uur, 08:09 uur, 08:28 uur, 08:38 uur, 08:58 uur;
26: 08:08 uur.

Dat betekent dat voor de overige 14 groepen nog meer dan 1400 tijdstippen over zijn. Een gemiddelde van meer dan 100 per groep kan alleen behaald worden als er minstens één groep is met meer dan 100 tijdstippen.

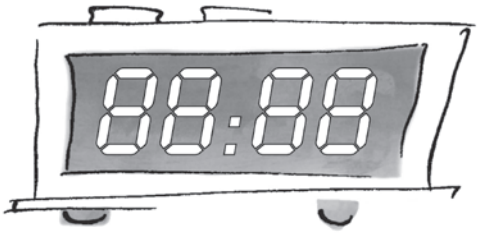
d Appie en Chrisje willen in de spelregels opnemen dat iedereen als geheime tijd een tijd moet nemen die met hetzelfde aantal lucifers te leggen is. Wat vind jij van die spelregel?

Ter beoordeling van de leerkracht. Belangrijk is dat er goed over mogelijke voor- en nadelen gedacht wordt.



Een ander groepje heeft de spelregels veranderd en meteen ook de naam:

De spelregels van het spel 'OP TIJD!'



Benodigdheden:

- *1 doosje lucifers*
- *Een blaadje papier voor iedere speler*
- *Als spelbord een stevig vel karton met vier 'lege' digitale cijfers*

Het spel

Elke speler schrijft in het geheim een digitale tijd op een blaadje en legt dat blaadje omgekeerd voor zich op tafel. De lucifers worden op een stapel gelegd waar iedere speler van mag pakken. De spelers maken met behulp van de lucifers één digitale tijd. De bedoeling is om die tijd zo dicht mogelijk bij je eigen geheime tijd te laten uitkomen.

Een digitale tijd kan ontstaan doordat de spelers om beurten één lucifer op een lege 'luciferplek' mogen leggen. Dat hoeft niet op een bepaalde volgorde, elke lege plek mag opgevuld worden. Wie aan de beurt is, mag ook een lucifer verplaatsen in plaats van een nieuwe neer te leggen. Zodra op een van de vier plaatsen een cijfer compleet is, mag daar niets meer aan veranderd worden. Het moet natuurlijk wel een cijfer zijn dat in een digitaal tijdstip kan voorkomen.
Als er op de eerste cijferplek een 4 staat, moet er verder gespeeld worden tot er een cijfer staat dat daar wel mag staan.

De vier cijfers die zo ontstaan, vormen de winnende tijd. Degene die met zijn geheime tijd het dichtst bij de winnende tijd zit heeft het spelletje gewonnen.

Je kunt meerdere spelletjes spelen. Na ieder spel noteert elke speler hoeveel minuten hij met zijn geheime tijd van de winnende tijd af zit. Degene die op het eind de laagste totaaltijd heeft, is de winnaar, die was het meest 'op tijd'.

Jij hebt na Les 9 inmiddels ervaring met het uitproberen van een nieuw spel.
Lijken de spelregels van 'Op Tijd!' op jouw spelregels?
Speel het spel én wie weet, wil je ook dit spel nog verbeteren.
Bekijk in dat geval nog eens de stappen in Les 9 en doe stap 3 tot en met stap 7.
Schrijf hieronder wat je ervan vindt.
Ook stap 8 mag je natuurlijk zetten.

Eigen invulling .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Les 11 Mobiele puzzels

Vroeger hadden mobiele telefoons cijfertoetsen waar je ook letters mee kon maken om sms'jes te sturen.
Hallo kon je krijgen door twee keer kort de 4 in te toetsen (h), daarna één keer de 2 (a), drie keer de 5 (l), nog eens drie keer de 5 (l) en tot slot drie keer de 6 (o).

Bekijk het volgende kruiswoordraadsel:

1	2	3
4		
5		

<u>horizontaal</u>
1 opening
4 meisjesnaam
5 om iets van te leren

<u>verticaal</u>
1 voor in je haar
2 Romeinse groet
3 kun je boodschappen in opbergen

Als je de puzzel oplost vind je:

horizontaal	**1 gat**	**4 eva**	**5 les**
verticaal	**1 gel**	**2 ave**	**3 tas**

Als we het antwoord gat op de mobiele telefoon intoetsten, konden we dat als volgt omschrijven:
- de g van gat is 4.1 (toets 4, 1× indrukken)
- de a is 2.1 (toets 2, 1×)
- de t is 8.1 (toets 8, 1×).

We kunnen de puzzelomschrijvingen dus ook 'mobiel' geven:

1 Wat zijn de mobiele puzzelomschrijvingen van de verticale woorden?

<u>horizontaal</u>

1 4.1 – 2.1 – 8.1
4 3.2 – 8.3 – 2.1
5 5.3 – 3.2 – 7.4

<u>verticaal</u>

1 4.1 - 3.2 - 5.3
2 2.1 - 8.3 - 3.2
3 8.1 - 2.1 - 7.4

De puzzel zal met deze omschrijvingen niet zo moeilijk op te lossen zijn. Maar dat verandert als we de volgorde van de cijfers veranderen. We schrijven alle cijfers van klein naar groot.
De omschrijving van gat wordt dan **111248** in plaats van **4.1 – 2.1 – 8.1**.
De omschrijving van 4 horizontaal is op die manier **122338**.

2 Wat zijn de omschrijvingen van de andere vier woorden uit de puzzel?

5 horizontaal 233457
1 verticaal 123345
2 verticaal 122338
3 verticaal 122478

3 Lukt het jou om de volgende puzzel op te lossen?

1 v 8.3	2 i 4.3	3 s 7.4
4 l 5.3	e 3.2	o 6.3
5 a 2.1	r 7.3	k 5.2

horizontaal

1 334478

4 233356

5 122357

verticaal

1 123358

2 233347

3 234567

Bedenk hierbij dat de cijfers die horen bij de letter in een bepaald vakje, zowel in een horizontale als in een verticale omschrijving staan.

Lukt het niet met de mobiele omschrijvingen alleen, dan vind je onderaan de bladzijde een hint.

4 Los ook de volgende puzzel op.

1 d 3.1	2 o 6.3	3 p 7.1
4 o 6.3	d 3.1	e 3.2
5 p 7.1	e 3.2	t 8.1

horizontaal

1 113367

4 123336

5 112378

verticaal

1 113367

2 123336

3 112378

Ook voor deze puzzel vind je onderaan de bladzijde een hint.

5 Bedenk nu zelf zo'n mobiele puzzel.

1	2	3
4		
5		

Ter beoordeling van de leerkracht.

horizontaal

1

4

5

verticaal

1

2

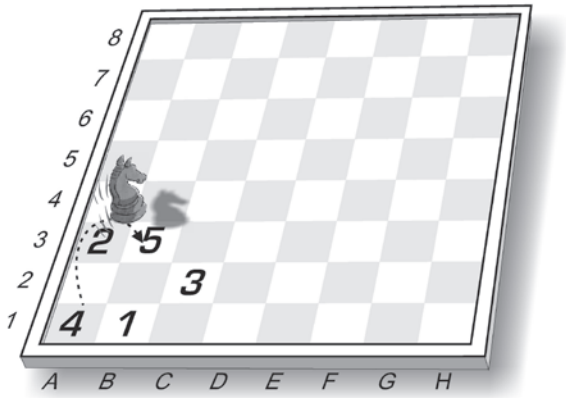
3

Hint bij opdracht 3: 1 horizontaal is een dier.

Hint bij opdracht 4: De letter in het centrum van de puzzel is een medeklinker.

Les 12 Hoe ver komt jouw paard?

'Vijfenveertig! Een nieuw record!', roept Judith naar Max. Max heeft afgesproken om met Judith een partijtje te schaken als hij klaar is met zijn huiswerk. In afwachting daarvan speelt Judith met het paard een zelfbedacht spelletje.



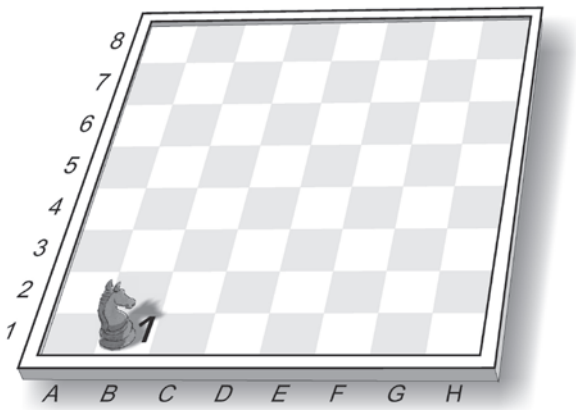
Op ruitjespapier tekent Judith een schaakbord. Vanuit vak B1 maakt Judith met het paard sprongen, zoals zijn toegestaan in het schaakspel (1x recht en 1x schuin). Zij nummert elk vak waar het paard op springt en springt net zolang door tot ze niet meer verder kan. Een vak waarop het paard al heeft gestaan, mag ze niet opnieuw gebruiken.

De eerste keer dat ze het spelletje deed kwam ze tot eenentwintig. En jij?

1 Ga door met springen op het bovenstaande schaakbord, zo lang als je kunt.

Wat is het laatste getal dat je hebt opgeschreven? Verschillende antwoorden zijn mogelijk.

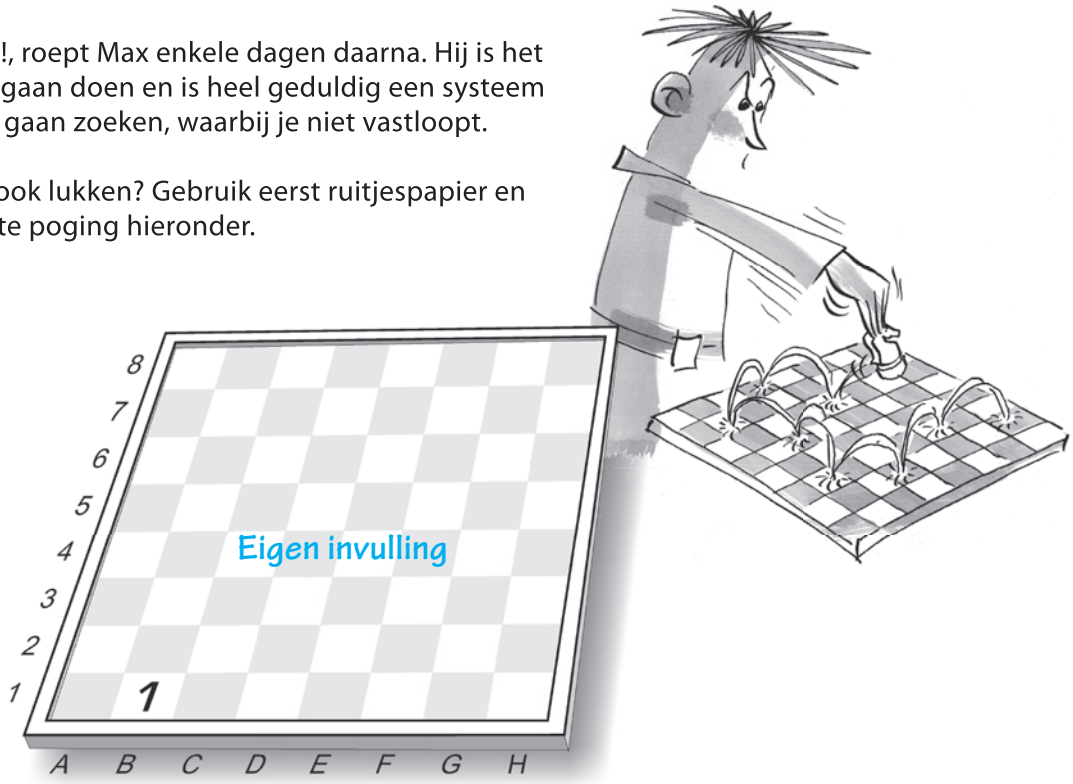
2 Misschien wil je de eerste sprongen wel anders zetten. Probeer, als je tenminste nog niet tot vierenzestig gekomen bent, in het onderstaande schaakbord je poging van boven te verbeteren. De vaste startplaats van je paard in dit spel is vak B1.



Hoe ver kom je nu? Verschillende antwoorden zijn mogelijk.

‘Vierenzestig’!, roept Max enkele dagen daarna. Hij is het spelletje ook gaan doen en is heel geduldig een systeem van springen gaan zoeken, waarbij je niet vastloopt.

3 Gaat jou dat ook lukken? Gebruik eerst ruitjespapier en noteer je beste poging hieronder.



Ondertussen zit Judith niet stil. Ook zij ontdekt een systeem om tot vierenzestig te komen.

4 Judith bedenkt dan ook nog de ultieme uitdaging.
Wie vindt het eerst een manier om tot vierenzestig te komen waarbij je vanaf het vierenzestigste vakje weer terug in het eerste vakje (B1) kunt springen?

Ben jij Judith en Max voor? Vind jij zo’n oplossing?

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	37	60	5	26	39	58	7	24
7	4	27	38	59	6	25	40	57
6	61	36	15	30	49	46	23	8
5	28	3	50	47	14	31	56	41
4	35	62	29	16	45	48	9	22
3	2	17	64	51	32	13	42	55
2	63	34	19	12	53	44	21	10
1	18	1	52	33	20	11	54	43

Er zijn meerdere manieren om tot 64 te komen. Een manier waarbij je bovendien vanaf 64 weer met een paardsprong naar 1 kunt zie je hierboven.

Toets 3

1 In Les 10 maakten Jurgen en Chrisje groepen van tijdstippen die met eenzelfde aantal lucifers te leggen zijn. Onder hun aantekeningen bevond zich onder meer onderstaande tabel.
De tabel is nog niet af. Onderzoek eerst hoe de tabel werkt.
Bepaal vervolgens met welk aantal lucifers je het grootste aantal tijdstippen kunt leggen.

lucifers minuten →	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
aantal lucifers tijdstip = aantal lucifers minuten + aantal lucifers uren					.. : 01					
				.. : 51	.. : 57					
				.. : 31	.. : 37					
				.. : 21	.. : 27					
				.. : 47	.. : 44					
				.. : 15	.. : 19	.. : 43				
			.. : 41	.. : 13	. : 16	.. : 42				
	.. : 11	.. : 17	.. : 14	.. : 12	.. : 10	.. : 18	.. : 40	.. : 48	.. : 28	.. : ..
lucifers uren ↓	1	1	2	7	8					
4 11 : .. 1	1 × **8**	1 × **9**	2 × **10**	7 × 11	8 × 12	8 × 13	13 × 14	13 × 15	6 × 16	1 × 17
5 17 : .. 1	1 × **9**	1 × **10**	2 × 11	7 × 12	8 × 13	8 × 14	13 × 15	13 × 16	6 × 17	1 × 18
6 14 : .. 1	1 × **10**	1 × **11**	2 × 12	7 × 13	8 × 14	8 × 15	13 × 16	13 × 17	6 × 18	1 × 19
7 12 : ..										
13 : ..										
15 : ..										
21 : .. 4	4 × **11**	4 × 12	8 × 13	28 × 14	32 × 15	32 × 16	52 × 17	52 × 18	24 × 19	4 × 20
8 10 : ..										
16 : ..										
19 : ..										
01 : .. 4	4 × 12	4 × 13	8 × 14	28 × 15	32 × 16	32 × 17	52 × 18	52 × 19	24 × 20	4 × 21
9 18 : ..										
07 : .. 2	2 × 13	2 × 14	4 × 15	14 × 16	16 × 17	16 × 18	26 × 19	26 × 20	12 × 21	2 × 22
10 22 : ..										
23 : ..										
04 : .. 3	3 × 14	3 × 15	6 × 16	21 × 17	24 × 18	24 × 19	39 × 20	39 × 21	18 × 22	3 × 23
11 20 : ..										
02 : ..										
03 : ..										
05 : .. 4	4 × 15	4 × 16	8 × 17	28 × 18	32 × 19	32 × 20	52 × 21	52 × 22	24 × 23	4 × 24
12 00 : ..										
06 : ..										
09 : .. 3	3 × 16	3 × 17	6 × 18	21 × 19	24 × 20	24 × 21	39 × 22	39 × 23	18 × 24	3 × 25
13 : .. 1	1 × 17	1 × 18	2 × 19	7 × 20	8 × 21	8 × 22	13 × 23	13 × 24	6 × 25	1 × 26

Uit de tabel blijkt dat je met 18 lucifers het grootste aantal tijdstippen kunt leggen.
Voor 186 tijdstippen heb je precies 18 lucifers nodig.

2 **Los deze mobiele puzzel op.**

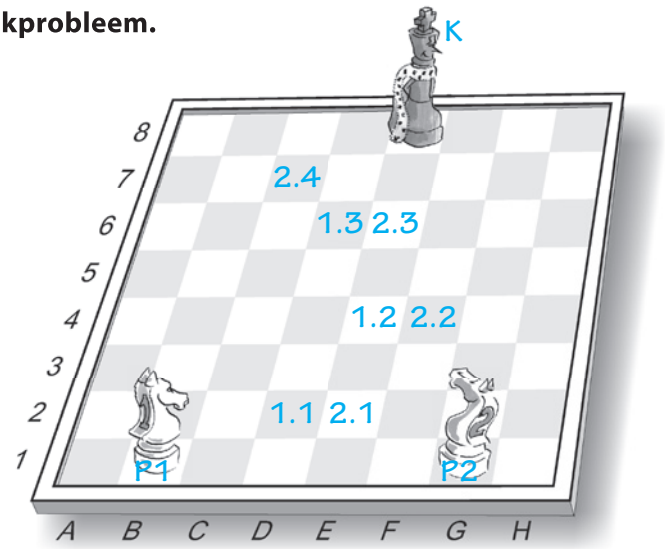
	1 g			
2 d	r	a	3 a	k
	o		d	
4 l	o	p	e	n
	t		m	

horizontaal	verticaal
2 1112223357	1 1133346678
4 1223335667	3 11122336

Gebruik indien nodig de volgende omschrijvingen:

horizontaal	verticaal
2 vurig dier	1 niet klein
4 te voet	3 lucht

3 **Een schaakprobleem.**



a De zwarte koning blijft op E8 staan.
De witte paarden (P1 en P2, let op het rugnummer) mogen steeds gelijkertijd een zet doen.

Welke van de twee paarden kan de zwarte koning het eerst schaak zetten? .....

Paard 1 kan de zwarte koning het eerst schaak zetten. .....

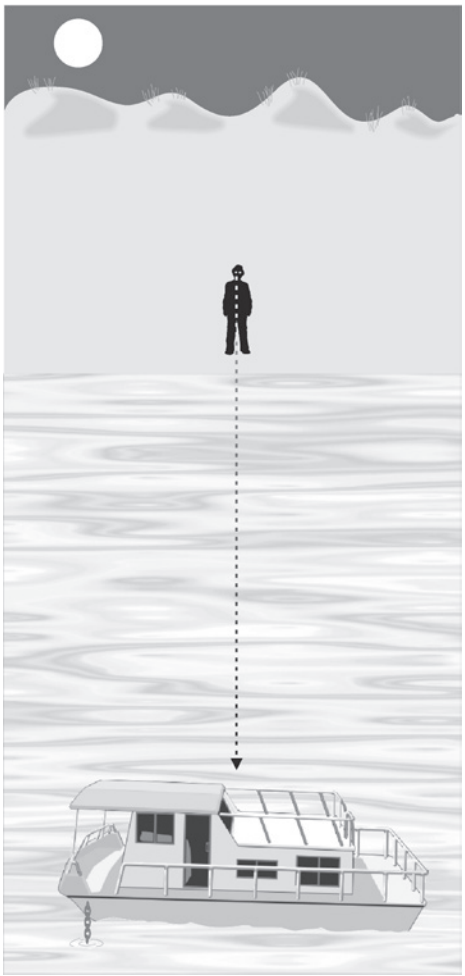
b In hoeveel zetten kan dat het snelst?
Hoeveel zetten heeft het andere paard nodig om de zwarte koning schaak te zetten? .....

Paard 1 kan het in drie zetten. (bijv. 1.1, 1.2 en 1.3) .....

Paard 2 heeft vier zetten nodig. (bijv. 2.1, 2.2, 2.3 en 2.4) .....

Les 13 Een oud kunstje

Je staat op het strand en ziet recht voor je een schip. Het schip ligt voor anker. Het lijkt ver weg en je wilt graag weten hoe ver het van de kust af is. Je moet dus een manier bedenken die je op het strand kunt uitvoeren.



Je bent nu aanbeland bij een probleem waarvoor al heel lang geleden slimme mensen een meetkundige oplossing bedachten. Treed nu in hun voetsporen en ontdek hoe je zonder natte voeten een redelijke schatting van de afstand tot de boot kunt maken.

1 Heb jij een idee hoe je dit probleem kunt aanpakken?

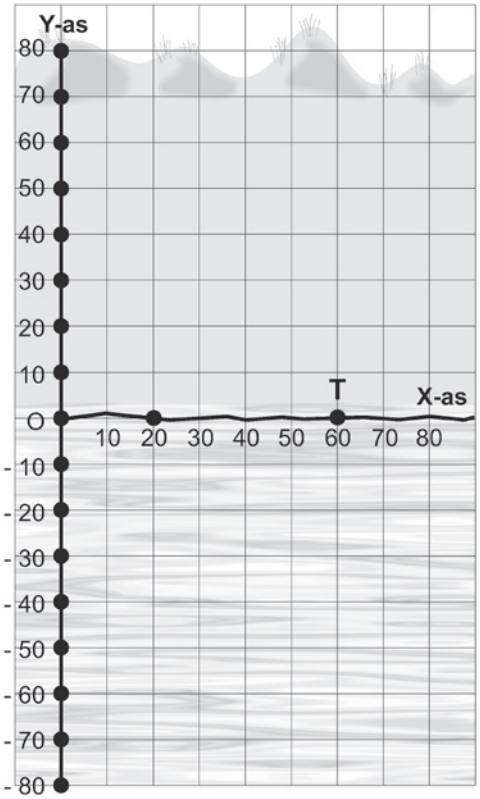
Eigen invulling mogelijk.

In deze les gaan we op zoek naar een oplossing.
We gebruiken voor de tekening een assenstelsel.
(zie bijvoorbeeld Topklassers Wiskunde deel 1)

Toeschouwer T staat op de kustlijn, de X-as. T staat op 60 meter van de oorsprong O. Boven de X-as is het strand, onder de X-as is de zee. Precies voor zich ziet T het schip. (wij zien het schip nog niet)

2 Wat is de x-coördinaat van het schip?

x = 60. Uitleg: de x-coördinaat van het schip is dezelfde als de x-coördinaat van toeschouwer T.



De Y-as kun je beschouwen als een lange draad.
Het positieve deel gaat richting de duinen.
Op elke plek naast het positieve deel van de draad kun je aflezen hoe ver je van de kustlijn af bent.
Het negatieve deel van de Y-as ligt in zee.
Op 40 meter van T staat een paal op de kustlijn.

Kies zelf een plek waar het schip kan liggen (met de goede x-coördinaat) en zet in de tekening bij die plek de letter S. Jij weet dan hoe ver het schip van de kust af ligt, maar toeschouwer T weet dat nog niet.

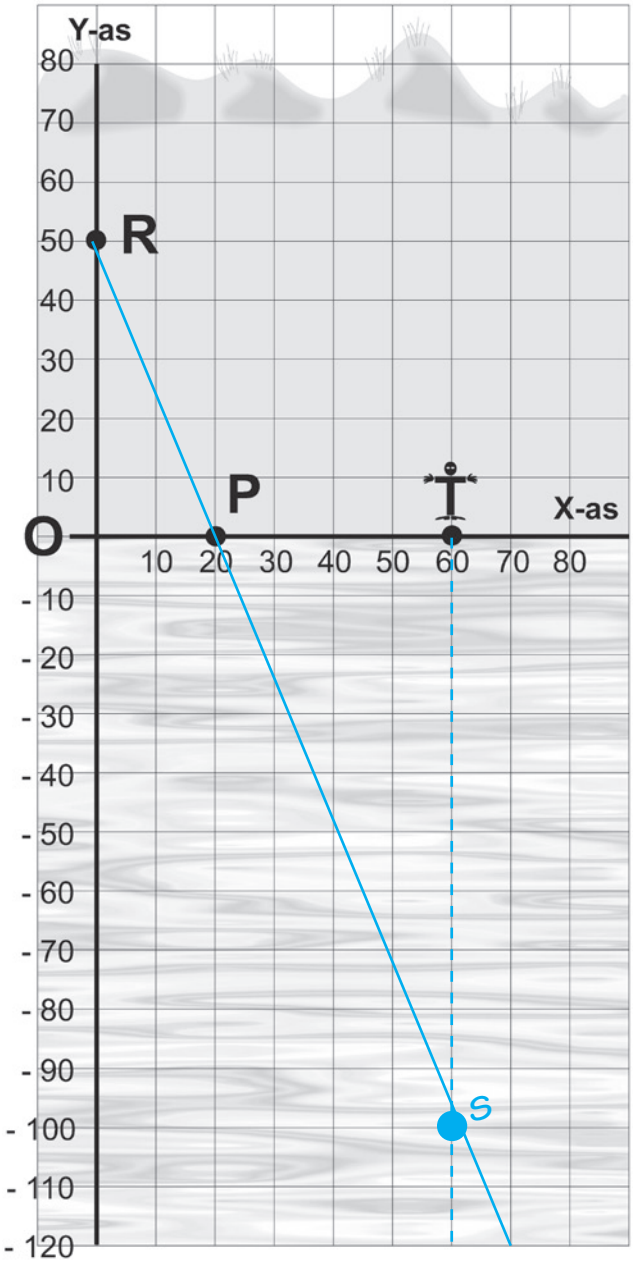
3 Kun jij de toeschouwer helpen de afstand van het strand tot het schip te berekenen (zonder de y-coördinaat voor te zeggen)?

Eigen invulling mogelijk.

Met de volgende aanwijzingen ontdek je de 'oude' meetkundige manier.

Toeschouwer T loopt 40 meter langs de kustlijn in de richting van O. Daar staat een lange paal in het zand, en als die paal er nog niet staat, dan zet hij die alsnog op punt P.
T loopt nog 20 meter verder langs de kustlijn tot aan de oorsprong O.
Van daaruit loopt T loodrecht op de kustlijn richting duinen, dat is dus langs de Y-as.
T loopt precies tot het punt R van waaruit hij het schip in het verlengde van de paal ziet liggen.

In ons geval ligt het punt R 50 meter van de oorsprong af.



4 Wat zijn de coördinaten van punt R?

Punt R heeft als coördinaten (0,50).

5 Geef in de tekening hiernaast de plaats S van het schip aan.
Laat ook in de tekening zien hoe je die plek gevonden hebt. Hoeveel meter ligt het schip van de kust af?

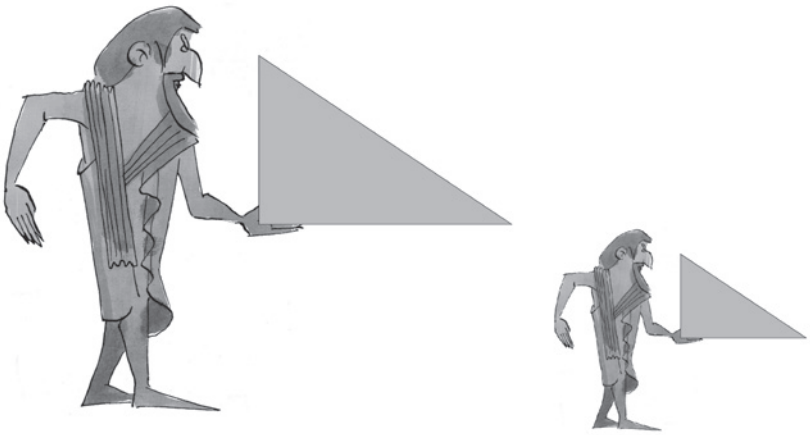
Het schip ligt 100 meter van de kust af. S = (60, –100).

6 Wat valt je op bij de driehoeken ROP en STP?

Driehoeken ROP en STP hebben dezelfde vorm, ze zijn gelijkvormig. De lengtes PT, TS en PS zijn twee keer zo lang als de lengtes PO, OR en PR.

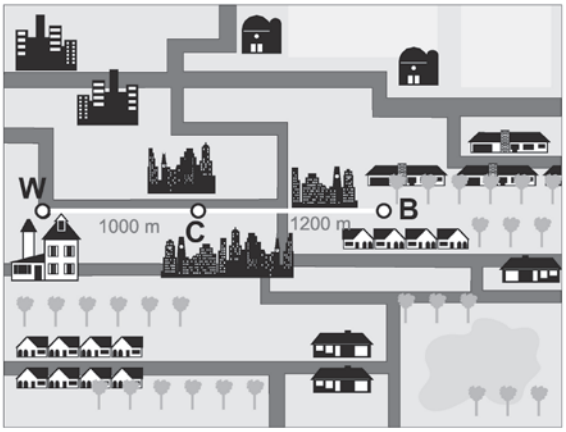
Al meer dan duizend jaar wordt in de wiskunde gebruik gemaakt van gelijke verhoudingen in gelijkvormige driehoeken.

Vandaar 'een oud kunstje'.



Les 14 Twee nieuwe scholen

Het gemeentehuis van Slimmeren ligt precies in het centrum van deze plaats. Er is een raadsvergadering aan de gang. De woordvoerders van drie politieke partijen geven hun mening over de plaats waar twee nieuwe basisscholen gebouwd moeten worden.
Het inwonertal van Slimmeren is de afgelopen jaren flink toegenomen. Er is behoefte aan twee nieuwe scholen; dat worden basisschool 't Zonnetje en basisschool de Dageraad.
Een bestaande school, basisschool Wolkenloos (W), ligt zo'n 1000 meter ten westen van het centrum (C). Nieuwbouwwijk Buiten (B) ligt ruim een kilometer ten oosten van het centrum.



Alle drie de partijen hebben in een tekening aangegeven welke plaatsen volgens het partijstandpunt geschikt zijn voor de twee nieuwe scholen. De burgemeester vraagt aan de drie woordvoerders om hun voorstellen toe te lichten.

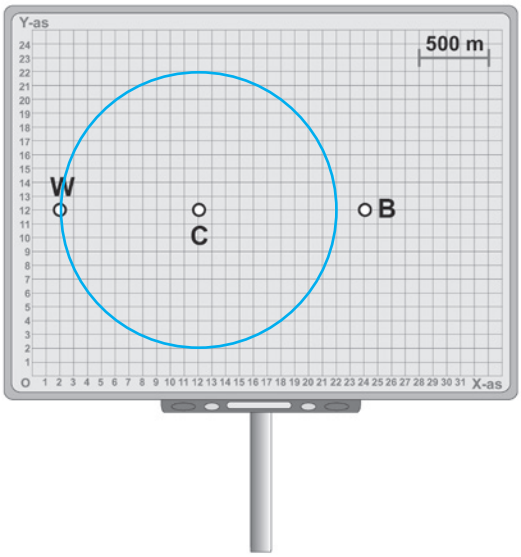
Mevrouw Verlopen van de Bewonerspartij zegt:

'Volgens een eerder genomen raadsbesluit moeten alle scholen even ver van het centrum van Slimmeren af liggen. Zo hoeven de centrumbewoners hun keuze voor een school niet te laten afhangen van de afstand.'

1 Wat zijn de mogelijke plaatsen voor een school, als geldt dat die dezelfde afstand tot C moet hebben als W? Wat voor figuur zal mevrouw Verlopen getekend hebben?

Waarmee denk je dat ze de tekening maakte? De mogelijke plaatsen voor een nieuwe school volgens het advies van de Bewonerspartij vormen een cirkel met C als middelpunt. Mevrouw Verlopen tekende die cirkel waarschijnlijk met een passer.

Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Bewonerspartij hoort.



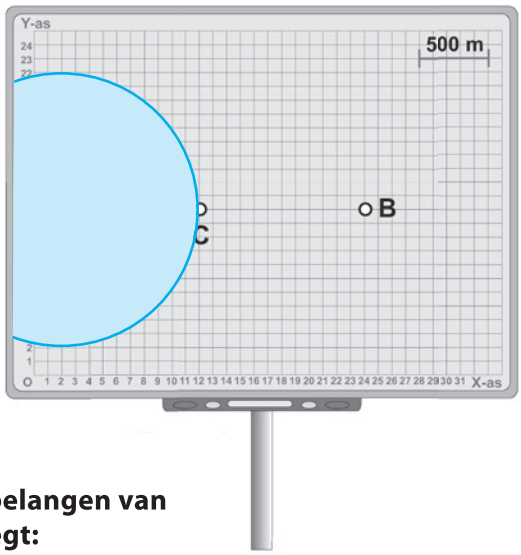
De heer Best van de Westpartij zegt:

'De nieuwe scholen mogen niet te veel concurrentie vormen voor basisschool Wolkenloos. Onze partij vindt het daarom onaanvaardbaar als er een nieuwe school gebouwd wordt binnen een straal van 1000 meter van deze school.'

2 Hoe zal de heer Best de mogelijke plaatsen voor nieuwe scholen tekenen?
Of is het makkelijker voor hem om aan te geven waar de scholen *niet* mogen komen?

Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Westpartij hoort.

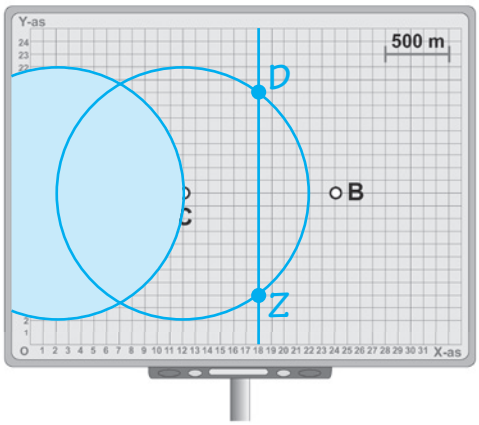
De Westpartij wil geen scholen binnen 1 kilometer van basisschool Wolkenloos (W). In het blauwe gebied binnen de cirkel mogen dus geen nieuwe scholen gebouwd worden.



Mevrouw Inbreng van de Nieuwpartij verdedigt de belangen van de bewoners van de nieuwbouwwijk Buiten (B) en zegt:

'De school Wolkenloos is moeilijk te bereiken voor onze bewoners. Ik vind het niet meer dan redelijk dat de nieuwe scholen even dicht bij het centrum B van Buiten liggen als bij het centrum C van Slimmeren.'

De mogelijke plaatsen voor nieuwe scholen volgens het standpunt van de Nieuwpartij liggen op een verticale lijn precies tussen C en B. Alle punten op die lijn hebben de x-coördinaat 18.



3 Waar zal mevrouw Inbreng de nieuwe scholen tekenen?
Maak de tekening die volgens jou bij het standpunt van de Nieuwpartij hoort.

4 Hoe zal de discussie verlopen? Welke partij krijgt haar zin? Als de partijen goed naar elkaar luisteren zullen ze snel tot overeenstemming komen. Met de nieuwe scholen op de plaatsen D en Z wordt gehoor gegeven aan de wensen van alle drie de partijen.

5 Wat zullen de coördinaten zijn van school Z ('t Zonnetje) en school D (Dageraad)?
D = (18,20) en Z = (18,4) of D = (18,4) en Z = (18,20)

Les 15 De parachute

'Het doek is gevallen', jammerde Johnny, de stuntelige assistent. 'Als jij niet snel beter werk levert, dan is ook voor jou het doek gevallen', donderde de bedrijfsleider van Octogoon, de parachutefabriek.
'Hoe haal je het in je hoofd om met een vierkante parachute aan te komen?
Ik wil toch op zijn minst een achthoekige. En die moet je nu maar eens snel gaan maken van dezelfde hoeveelheid doek die je daarnet hebt laten vallen!'

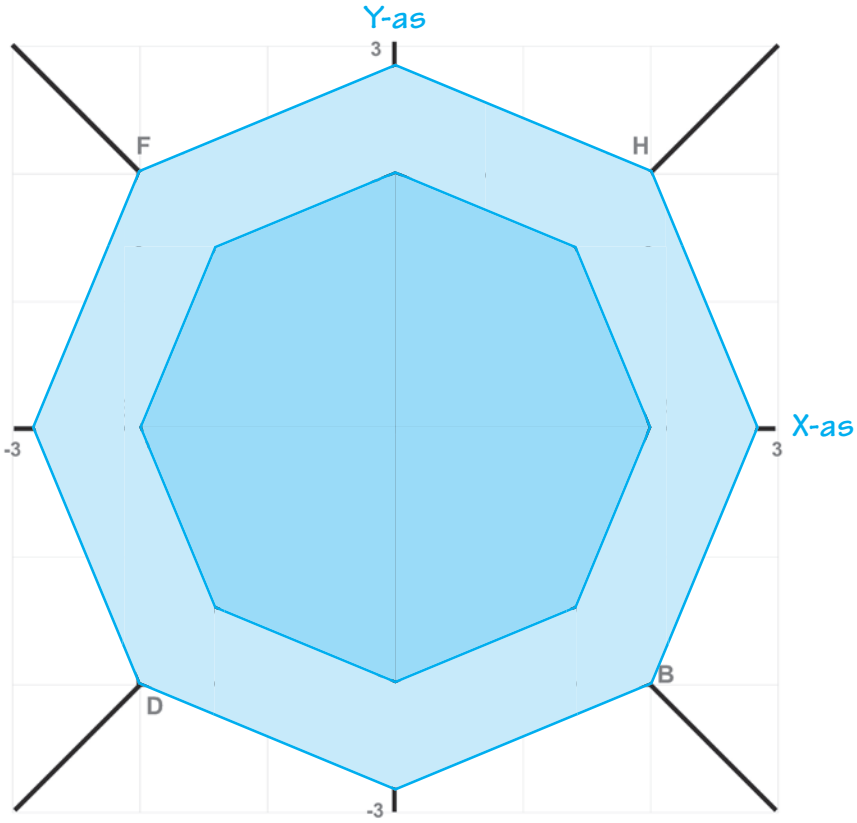
Johnny had op vier houten assen een doek van vier bij vier meter gespannen. Hij was heel handig in het knippen en verstellen van doeken, maar ruimtelijk inzicht was duidelijk niet zijn sterkste kant. Nu moest hij van deze doek een regelmatige achthoek zien te maken.

Johnny was wel zo verstandig om eerst een tekening te maken. Hij vond een liniaal bij zijn tekenspullen, maar die was alleen geschikt om rechte lijnen mee te trekken. Er stonden geen cijfers meer op, je kon er niet mee meten. Gelukkig had Johnny wel een passer.

Eerst tekende Johnny de vierkante parachute. (zie figuur 1)

Daarna tekende hij een regelmatige achthoek die binnen het bestaande doek paste.

Johnny gebruikte zijn passer om de afstand OA op de diagonale assen af te meten. Hij tekende vervolgens een rechte lijn van punt A naar het 'nieuwe punt' op OB, van daaruit een rechte lijn naar C en zo verder zowel via de nieuwe punten op de diagonale assen als via E en G.



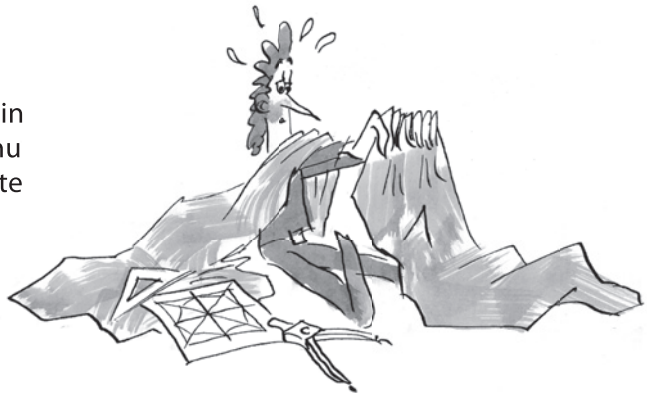
figuur 1

1 Teken in figuur 1 de achthoek op de manier van Johnny.

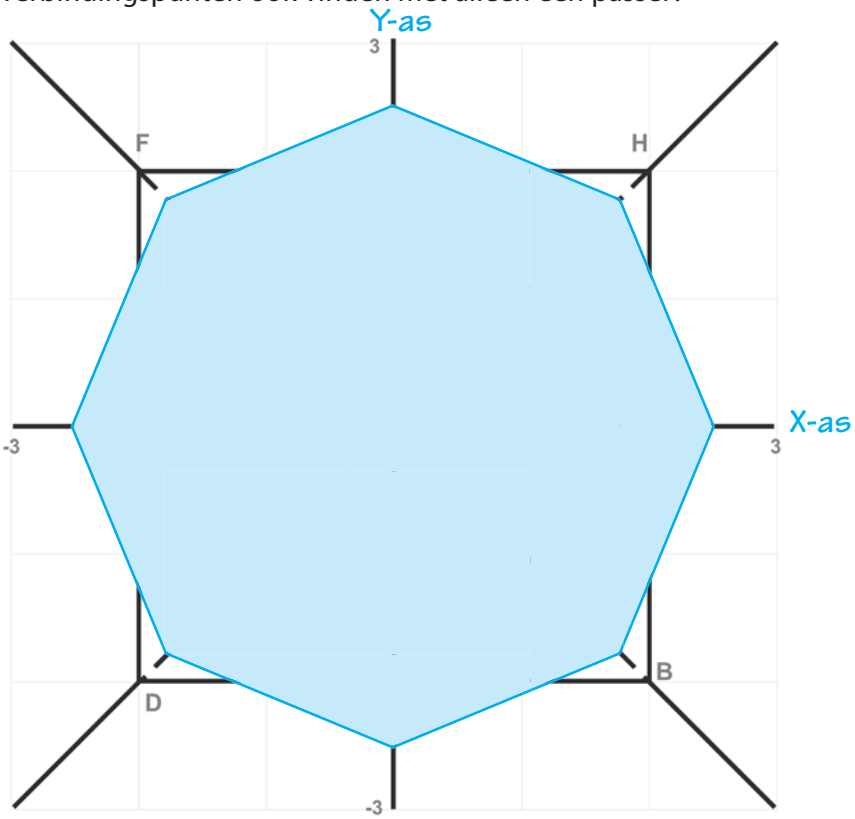
Vervolgens tekende Johnny een regelmatige achthoek door op de rechte assen de afstand OB af te meten en daarna de betreffende punten te verbinden.

2 Teken ook die achthoek in figuur 1.

Johnny zag wel in, dat de ene achthoek te klein was en de andere te groot. Maar hoe kon hij nu een achthoek maken met dezelfde oppervlakte als zijn vierkante parachute? Zijn baas eiste van hem dat hij opnieuw een achthoek tekende. De oppervlakte daarvan mocht niet meer dan 10% verschillen van de oppervlakte van de vierkante parachute.



3 Hoe kan Johnny dit probleem aanpakken? Voor deze moeilijke kwestie mag hij behalve zijn passer en potlood ook een geleende liniaal met cijfers gebruiken.
Lukt het jou om in figuur 2 zo'n regelmatige achthoek te tekenen?
Kun jij de goede verbindingspunten ook vinden met alleen een passer?

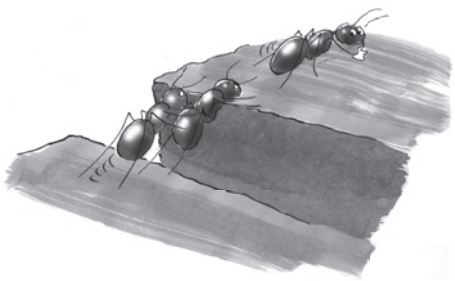


figuur 2

Beschrijf hieronder hoe jij dit probleem hebt aangepakt.

Johnny gebruikte zijn geleende liniaal om precies het midden tussen een hoekpunt van de kleine achthoek en een bijbehorend hoekpunt van de grote achthoek te tekenen. Vervolgens gebruikte hij zijn passer om de andere zeven hoekpunten te tekenen. Daarna verbond hij de acht hoekpunten. Het midden tussen een hoekpunt van de kleine achthoek en een bijbehorend hoekpunt van de grote achthoek kan overigens ook getekend worden met alleen een passer.

Les 16 De mieren van Pascal



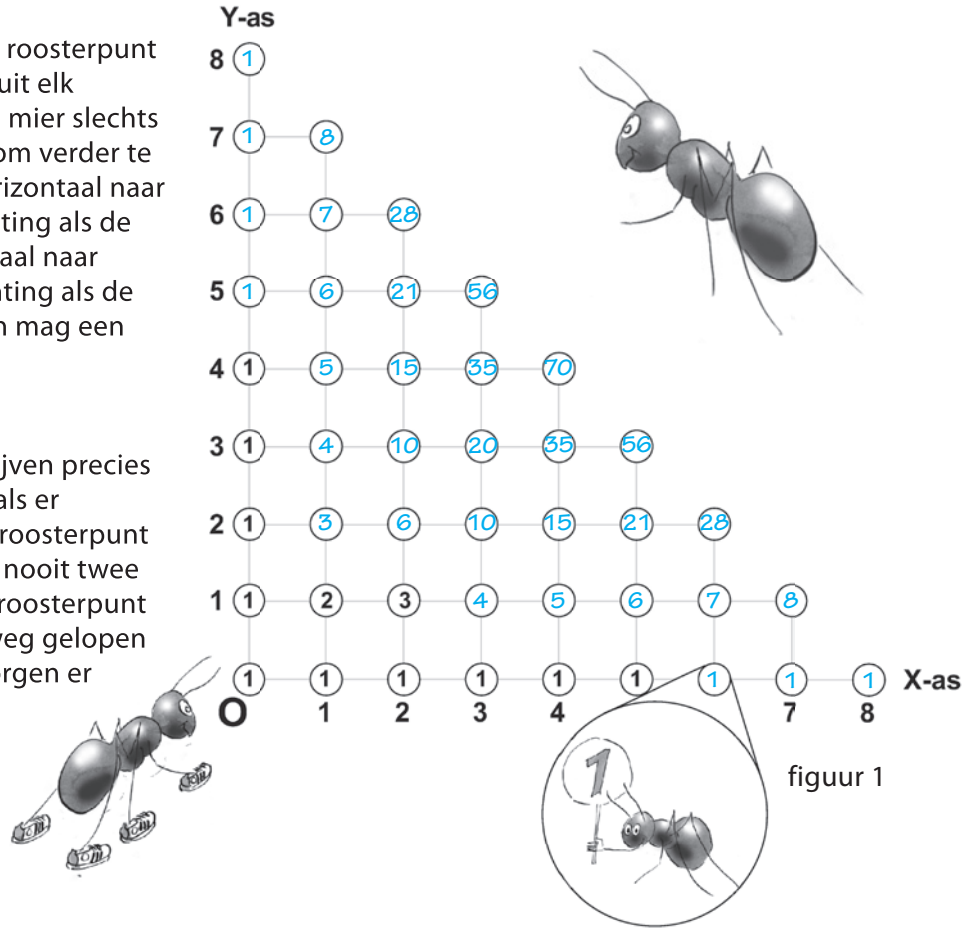
Mieren zijn een nijver en zorgzaam volkje. Er zijn zelfs mieren die met hun lijf gaten in de weg vullen, zodat de andere mieren hun weg kunnen vervolgen. Zo zullen mieren die een nieuw gebied binnengaan het waarschijnlijk eerst goed verkennen.

Dat geldt in ieder geval voor de mieren van Pascal die voor het eerst in een assenstelsel komen. Voor de weggetjes die zij gaan lopen hebben zij hun plannen al helemaal klaar. Ze doorlopen alle mogelijkheden, zodat geen van de mieren ooit hoeft te verdwalen.

Met een grote groep vertrekken de mieren vanuit de oorsprong O. Hun strategie is als volgt:

looprichting
Alle mieren lopen van roosterpunt naar roosterpunt. Vanuit elk roosterpunt heeft een mier slechts twee mogelijkheden om verder te lopen. Of hij loopt horizontaal naar rechts in dezelfde richting als de X-as of hij loopt verticaal naar boven in dezelfde richting als de Y-as. Bij het verkennen mag een mier nooit terug.

achterblijvers
Op elk roosterpunt blijven precies zoveel mieren achter als er manieren zijn om dat roosterpunt te bereiken. Er blijven nooit twee mieren op een zelfde roosterpunt die precies dezelfde weg gelopen hebben. De mieren zorgen er bovendien ook voor dat ze geen enkele mogelijkheid overslaan. Er blijven daarom nooit te veel, maar ook nooit te weinig mieren achter.



figuur 1

1 Er zijn twee manieren om (1,1) te bereiken, dus er blijven twee mieren achter op (1,1). Daarom is er in figuur 1 in het assenstelsel een 2 ingevuld op roosterpunt (1,1).

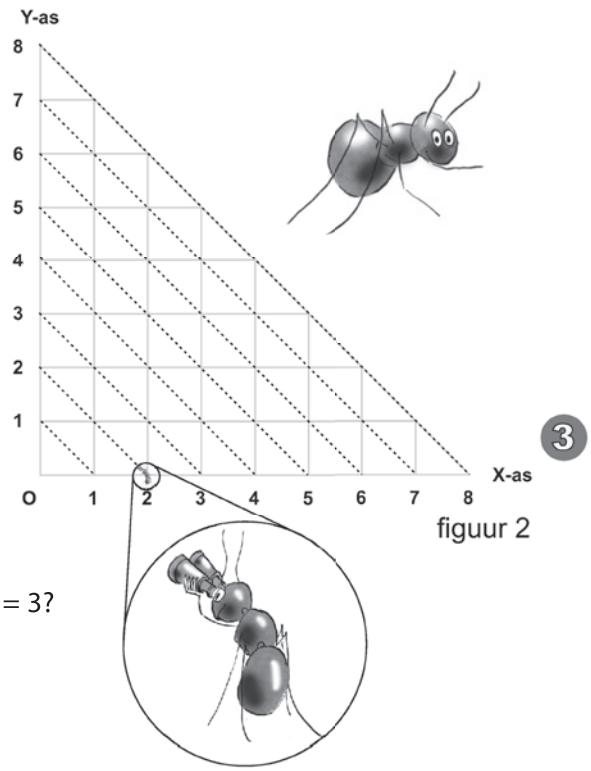
Hoeveel mieren blijven er achter op roosterpunt (1,2)? 3 (1,2) achterblijvers. En hoeveel achterblijvers zijn er op (2,2), ofwel op hoeveel manieren kan een mier van O naar (2,2) lopen? 6 (2,2) achterblijvers. Vul ook op alle andere roosterpunten het aantal achterblijvers in.

2 Hoeveel achterblijvers zijn er op (47,1)? Op (47,1) zijn 48 achterblijvers

Hoeveel achterblijvers zijn er op (15,2)? Op (15,2) zijn 136 achterblijvers

Schrijf hiernaast hoe je je antwoord gevonden hebt. In de rij op hoogte 2 zit een mooie regelmaat: 1, 3, 6, 10, ... Het getal op (15,2) is de zestiende term in die rij. Op (15,2) zijn 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 = 8 × 17 = 136 achterblijvers.

De mieren werken heel systematisch. Ze tellen van ieder roosterpunt de y-coördinaat op bij de x-coördinaat. Vanuit O gaan ze eerst naar de punten waarvoor die som 1 is, ofwel waarvoor geldt **x + y = 1**. Dat zijn de roosterpunten (1,0) en (0,1) Van daaruit gaan ze naar de punten met **x + y = 2**. En zo verder.



figuur 2

3 In figuur 2 kunnen de mieren lopen tot de lijn

x + y = 8

De mieren op de X-as hebben mooi zicht op die diagonale lijnen in het assenstelsel.
Zo ziet de mier op (2,0), dat er op de lijn **x + y = 2** in totaal vier mieren zijn achtergebleven.

4 Hoeveel mieren zijn er achtergebleven op de lijn x + y = 3?

x + y = 3 dus 8 (1 + 3 + 3 + 1) mieren

En hoeveel op de lijn x + y = 4?

x + y = 4 dus 16 (1 + 4 + 6 + 1) mieren

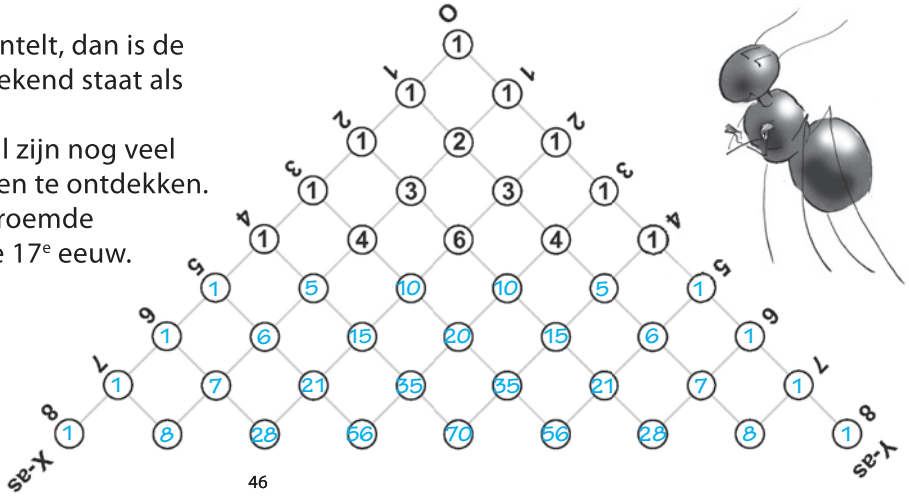
De mier op (8,0) weet van alle mieren voor hem op de X-as hoeveel mieren er in hun diagonale lijn zijn achtergebleven. Zo kan hij snel uitrekenen hoeveel mieren er in totaal zullen achterblijven tot en met zijn eigen lijn x + y = 8.

5 Hoeveel mieren zijn dat bij elkaar? Op lijn x + y = 8 blijven 2^8 = 256 mieren achter.
De mier op (8,0) rekent snel uit dat er tot en met zijn lijn x + y = 8 in totaal
1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511 mieren achterblijven.

De mier op (0,8) doet het anders. Zij telt eerst het aantal mieren op haar eigen diagonale lijn x + y = 8. Dan weet zij zonder hulp van de andere mieren het antwoord op vraag 5.

6 Hoe kan zij dat zo snel weten? De mier op (0,8) heeft ontdekt dat er telkens op iedere lijn x + y = ... één mier meer achterblijft dan op alle voorgaande lijnen x + y = ... bij elkaar. Zo weet deze mier dus dat er in totaal tot en met de lijn x + y = 7 één mier minder overblijft dan het aantal dat achterblijft op haar eigen lijn x + y = 8. In totaal blijven er 256 (op x + y = 8) + 255 (tot en met x + y = 7) = 511 mieren achter. In onderstaande afbeelding staat de verder ingevulde driehoek van Pascal.

Als je het assenstelsel kantelt, dan is de driehoek zichtbaar die bekend staat als **driehoek van Pascal**.
In de driehoek van Pascal zijn nog veel meer getalbijzonderheden te ontdekken.
Blaise Pascal was een beroemde Franse wiskundige uit de 17e eeuw.

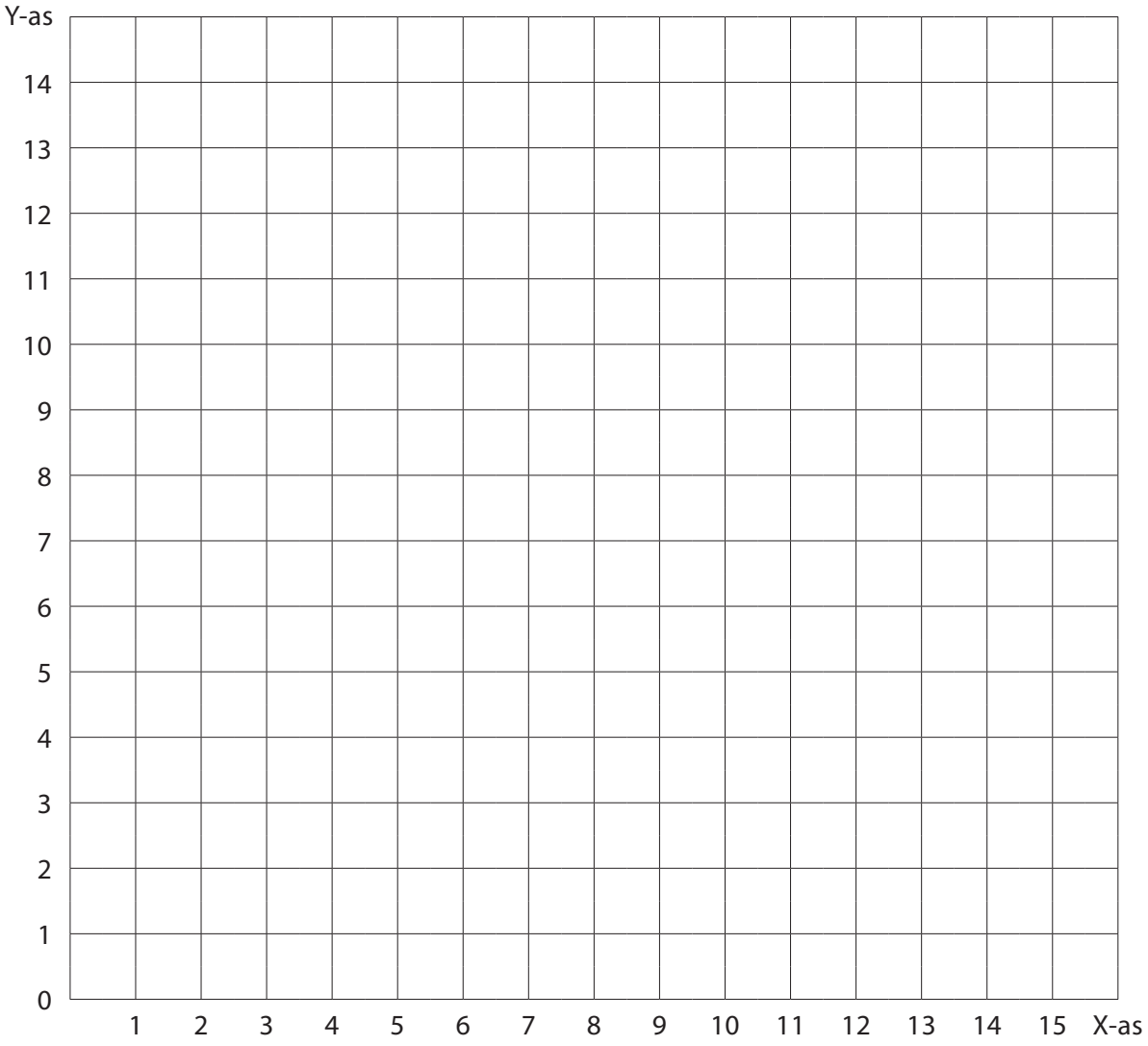


Toets 4

1 In deze toets ga je in het onderstaande assenstelsel een zelfverzonnen figuur maken.
Bij die figuur verzin je aanwijzingen op het niveau van een mede-*topklasser*.
Met behulp van alleen die aanwijzingen moet een *topklasser* precies dezelfde figuur kunnen maken in een leeg assenstelsel.

Schrijf op de volgende pagina je aanwijzingen. Verwerk daarin minstens twee onderdelen uit de lessen 13 tot en met 16. Denk daarbij aan gelijkvormige driehoeken (Les 13), gelijke afstanden en cirkels (Les 14), gebruik van de passer en regelmatige achthoek (Les 15) en mogelijke weggetjes en de driehoek van Pascal (Les 16).
Onderaan de bladzijde waarop je je aanwijzingen kunt schrijven, is nog ruimte voor een eventuele illustratie.

Laat als je klaar bent een andere topklasser jouw zelfbedachte opgave maken. Vergelijk daarna jullie figuren. Waren je aanwijzingen duidelijk? En waren ze bovendien niet te moeilijk en niet te makkelijk? Schrijf hieronder je ervaringen op. Ter beoordeling van de leerkracht.
Dat kan het best gebeuren nadat een andere leerling de figuur heeft proberen te maken.



Teken op ruitjespapier de figuur van ..... (naam)

Gebruik ruitjes van 1 cm bij 1 cm (tenzij de *topklasser* die deze opgave maakte, aangeeft dat je een ander formaat moet gebruiken) en volg onderstaande aanwijzingen op.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Eindtoets A

1	2	3	4	5	6	7	8

In Eindtoets A ga je op zoek naar een woord van acht letters.
Die acht letters vind je door de acht opgaven op te lossen.
Elke opgave levert een getal op dat omgezet moet worden in een letter.
Hoe je die getallen om kunt zetten zie je in het voorbeeld.

In Les 11 staan puzzels waarin de toetsen van een oude mobiele telefoon (zoals die vroeger gebruikt werden) een rol spelen.
Ook in deze Eindtoets spelen deze mobiele toetsen een rol.
Stel het antwoord op een vraag is 168.
Dan ga je met 168 rekenen: **168 ? 1 + 6 + 8 = 15 ? 1 + 5 = 6**.
Het resultaat is 6. De 6 staat voor toets 6 op de mobiele telefoon.
Het gaat dus om een van de drie letters m, n of o.
Waarschijnlijk kom je er vanzelf achter welke de goede letter is.

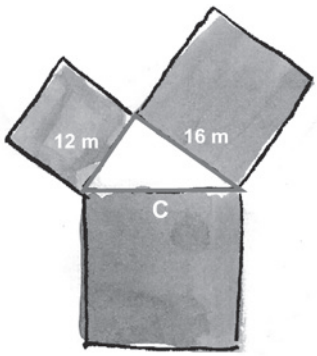
Als dat niet lukt, kun je op het eind van deze toets verdere aanwijzingen vinden.

1 Hoe meer delers, hoe beter. De 1 telt niet mee. Elke andere deler telt net zo vaak mee als hij in het getal voorkomt. Hoeveel priemdelers heeft het getal 10 × 18 × 20? .....
10 x 18 x 20 = 2 x 5 x 2 x 3 x 3 x 2 x 2 x 5. Dat zijn 8 delers.
De 8 staat voor de letter t, u of v.

2 Hoeveel verschillende indelingen in rijen en kolommen zijn er om 64 even grote kaartjes over een rechthoek te verdelen? Let op: 1 rij en 64 kolommen telt mee, en 64 rijen en 1 kolom telt mee als een andere indeling. Er zijn 7 indelingen. 1–64, 2–32, 4–16, 8–8, 16–4, 32–2, 64–1. De 7 staat voor de letter p, q, r of s.

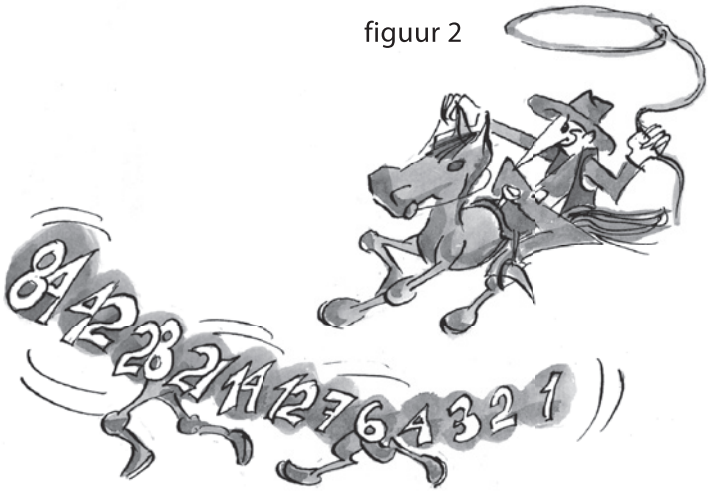
3 Wat is het op een na grootste getal onder de 1000 dat je kunt schrijven als één macht van 2?
Het grootste getal is 512 (= 2^9). Het op een na grootste getal is 256 (= 2^8).
2 + 5 + 6 = 13, 1 + 3 = 4. De 4 staat voor de letter g, h of i.

4 Hoe lang is zijde c van de rechthoekige driehoek in figuur 1? Zijde c = 20 m. 2 + 0 = 2
De 2 staat voor de letter a, b of c.



figuur 1

figuur 2

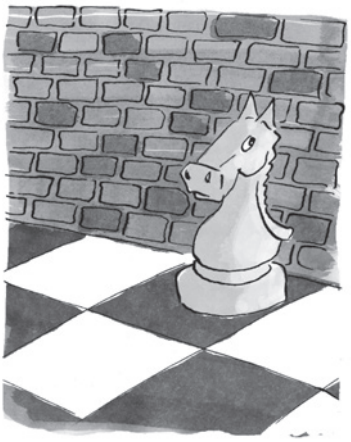


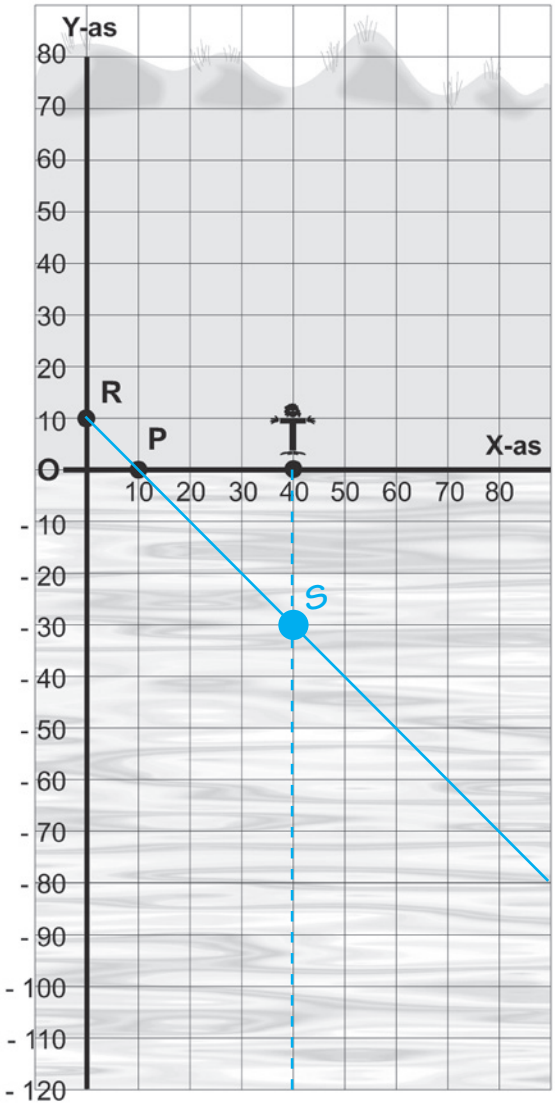
5 Met hoeveel lucifers leg je digitaal drie minuten voor tien 's avonds? Drie minuten voor tien 's avonds is 21:57 uur. Dat leg je met 5 + 2 + 5 + 3 = 15 lucifers. 1 + 5 = 6. De 6 staat voor de letter m, n of o.

6 Behalve de rand van het schaakbord zijn er geen belemmeringen om te springen voor een zwart paard dat op vak H4 staat. Hoeveel verschillende sprongen kan het paard maken?

Het zwarte paard kan naar 4 verschillende plaatsen springen.

Naar de vakken G2, F3, F5 en G6. De 4 staat voor de letter g, h of i.





7 Toeschouwer T ziet schip S recht voor zich in zee. (figuur 2). Zij loopt naar punt R en ziet in één lijn paal P en schip S. Teken de plaats van schip S.

De y-coördinaat van S = – 30. 3 + 0 = 3.

De 3 staat voor letter d, e of f.

8 In het assenstelsel waarin ik wil tekenen is 1 cm de afstand tussen roosterpunt O (0,0) en roosterpunt (1,0). Ik teken een cirkel door het punt (3,4) met O als middelpunt.
Hoe groot moet ik de afstand nemen (in cm), tussen de passerpunt die ik in het papier prik en de potloodpunt van de passer?

De afstand tussen O en (3,4) is 5 cm.

(In Les 8 kon je zien dat $3^2 + 4^2 = 5^2$).

De 5 staat voor de letter j, k of l.

Succes met het zoeken van de letters. Hieronder staan hint 1 en, als het echt nodig is, hint 2.

hint 1: Het gezochte woord is een 'wiskundig' muziekinstrument.

hint 2: Rechtsonder in de hokjes staat hoe vaak je bij de letter de toets moet indrukken.

1	2	3	4	5	6	7	8
t	r	i	a	n	g	e	l
1	3	3	1	2	1	2	3

Eindtoets B

Eindtoets B gaat op dezelfde manier als Eindtoets A. Met één groot verschil.

Nu mag jij de opdrachten zelf verzinnen. Probeer bij elk tweetal lessen uit dit werkboek een interessante en uitdagende opdracht te verzinnen. Bedenk er vervolgens ook een *mobiele* oplossing bij of misschien zie jij andere mogelijkheden om tot een 'eindantwoord' te komen. Als jij zelf originele ideeën hebt om de toets vorm te geven, dan mag je die erin verwerken. Graag zelfs.

Ter beoordeling van de leerkracht.

Nu ben je klaar. Wie durft jouw toets te maken?