wiskunde

deel 4

TOPklassers

Antwoordenboek

Pascal Goderie

ISBN 978 90 262 4218 2

TOPklassers

wiskunde

deel 4

Antwoordenboek

Auteur
Pascal Goderie

Bekadidact

Illustraties
Beeldstormers/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Vormgeving en lay-out
Beeldstormers/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Eerste druk, eerste oplage 2009

ISBN 978 90 262 4218 2

Inleiding voor de leerkracht

Dit is het antwoordenboek van het vierde deel van *Topklassers Wiskunde*.
Topklassers Wiskunde zijn vooral bestemd voor kinderen van groep 7 en 8 die behoefte hebben aan een extra uitdaging. Het werkboek voor de leerling staat vol met wiskundige vraagstukken. Voor kinderen die zo'n uitdaging aankunnen en die niet snel opgeven.
Voor die kinderen bevatten *Topklassers Wiskunde* tal van interessante problemen, problemen waaraan zelfs ook veel middelbare scholieren hun hart kunnen ophalen.
De kinderen gaan in deel 4 onder andere op wiskundige wijze een papiertruc onderzoeken, zich verdiepen in cirkels en rankingpunten bij tennistoernooien onderzoeken.

Voor kinderen die wat minder zelfstandig met problemen aan de gang kunnen is dit boekje niet zo geschikt. Het is niet de bedoeling dat u als leerkracht veel steun moet gaan bieden. Wel zijn de opgaven bijzonder geschikt om in tweetallen of in kleine groepjes aan te werken. Misschien kunnen dergelijke groepjes hun nieuw opgedane kennis eens aan de groep presenteren?
Ook een klassikale aanpak van een van de problemen uit het werkboek kan een incidentele verrijking zijn van uw reguliere lessen rekenen-wiskunde.

Leerlingen die een les afhebben, kunnen in dit antwoordenboek zelf de antwoorden controleren.

Wie weet, komen uw leerlingen verrassend uit de hoek met mooie wiskundige oplossingen.
Veel plezier met uw *wiskunde topklassers*!

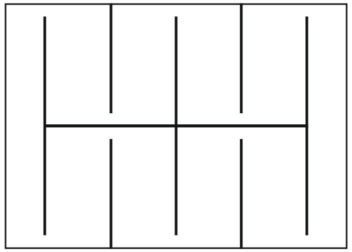
Pascal Goderie

Les 1 Papiergoochelarij deel 1

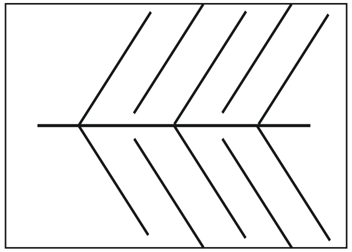
1. Een mogelijke aanpak van dit probleem wordt beschreven in het vervolg van Les 1 (via het Gravinprobleem) en in Les 2.

2. Er zijn verschillende manieren om door middel van tien heggen de kortst mogelijke wandeling groter te maken.
In het vervolg van Les 1 wordt een van die manieren beschreven.

3. Schematische vorm van figuur 3 uit Les 1:



Een mogelijkheid om de wandeling nog meer te verlengen ontstaat door de heggen schuin te plaatsen. Zie onderstaande afbeelding.

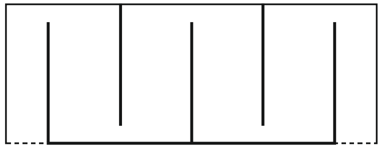


Les 2 Papiergoochelarij deel 2

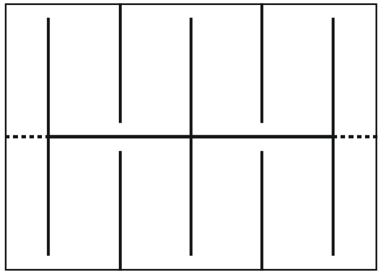
1. In het vervolg van Les 2 wordt de oplossing duidelijk gemaakt.

2. De ontstane opening bij figuur 2 is groter dan die in figuur 1.
Door het patroon van de heggen om en om tegen de vijver en tegen de omheining uit te breiden, zal de wandelweg alsmaar groter worden. En zo zal ook de opening in het papier alsmaar groter worden.

3. Een handige manier om dit te doen is de volgende.
Vouw een vel papier dubbel en maak in het dubbelgevouwen vel onderstaande knippen. (de stippellijn is de vouwlijn)

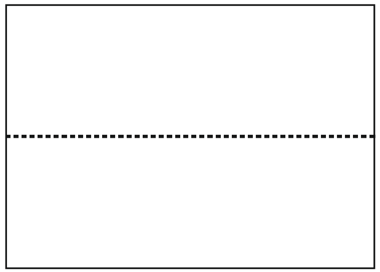


Vouw deze figuur over de vouwlijn weer open, dan verschijnt figuur 2 uit Les 2.

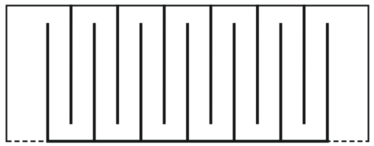


4. Een eenvoudige instructie voor de papiertruc zou er als volgt uit kunnen zien.

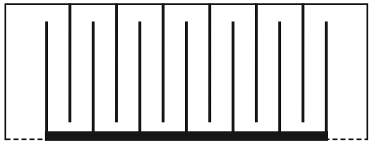
1. Vouw een vel papier dubbel.



2. Maak aan weerszijden de volgende knippen in het papier.



3. Knip uiteindelijk ook het centrum van de vouwlijn open.



4. Vouw het papier weer open en kruip door de opening in het papier!

Les 3 Kaarsjes aan of uit deel 1

1 Er zijn $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$ verschillende opstellingen met vijf kaarsjes in een kaarsenhouder met negen vakjes.

2 Bij alle 126 verschillende opstellingen uit opgave 1 kan steeds elk van de vijf kaarsjes aan of uit zijn. Het antwoord 126 moet dus vermenigvuldigd worden met het aantal manieren waarop een aan-of-uit-verdeling van de vijf kaarsjes te maken is.
Uit opgave 3 volgt dat zo'n verdeling op 32 manieren gemaakt kan worden.
Er zijn dus 126 x 32 = 4032 verschillende opstellingen.

3

aantal kaarsjes aan:	0	1	2	3	4	5
aantal manieren:	**1**	**5**	**10**	**10**	**5**	**1**

Het aantal verschillende manieren waarop de kaarsjes kunnen branden is in totaal 32.
Bij elke gekozen opstelling van vijf kaarsjes in een kaarsenhouder met negen vakjes gelden deze aantallen.

4

aantal kaarsjes aan:	0	1	2	3	4
aantal manieren:	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**

Het aantal verschillende manieren waarop de kaarsjes kunnen branden is in totaal 16.
Bij elke gekozen opstelling van vier kaarsjes in een kaarsenhouder met negen vakjes gelden deze aantallen.

Les 4 Kaarsje aan of uit deel 2

1 We gaan hierbij uit van één mogelijke opstelling met nul kaarsjes in de houder. Geen kaarsjes in de houder betekent ook geen enkel kaarsje aan.

aantal kaarsjes aan (x) / aantal kaarsjes in de kaarsenhouder (y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	1	2	1	-	-	-	-	-	-	-
3	1	3	3	1	-	-	-	-	-	-
4	1	4	6	4	1	-	-	-	-	-
5	1	5	10	10	5	1	-	-	-	-
6	1	6	15	20	15	6	1	-	-	-
7	1	7	21	35	35	21	7	1	-	-
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	-
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Tabel 1 Aantal manieren bij y kaarsjes in een vaste opstelling in de houder waarop een aantal van x kaarsjes aan kan zijn

2 Eenzelfde patroon ontstaat als in de driehoek van Pascal. Zie Les 16 van deel 2 *Topklassers Wiskunde*.
Bij zowel het onderzoek naar het aantal verschillende weggetjes (van de mieren) als bij het onderzoek naar het aantal manieren waarop een aan-of-uit-verdeling van kaarsjes te maken is, kan de driehoek van Pascal model staan voor de opbouw.
Zowel door beredenering als door het berekenen van de volgende termen in de driehoek van Pascal zul je steeds het goede aantal manieren vinden.

3 Bij zes kaarsjes in de kaarsenhouder is het aantal verschillende opstellingen het grootst, namelijk 5376.

Uit Tabel 1 en uit het aantal opstellingen in een situatie zonder onderscheid tussen aan en uit, is het totale aantal verschillende opstellingen af te leiden.
In vraag 2 en 3 van Les 3 werd al duidelijk dat er 4032 verschillende opstellingen zijn met vijf kaarsjes in de houder.

Het aantal verschillende opstellingen is bij

0 kaarsjes in de houder	:	1 x 1 = 1
1 kaarsje in de houder	:	9 x 2 = 18
2 kaarsjes in de houder	:	36 x 4 = 144
3 kaarsjes in de houder	:	84 x 8 = 672
4 kaarsjes in de houder	:	126 x 16 = 2016
5 kaarsjes in de houder	:	126 x 32 = 4032
6 kaarsjes in de houder	:	84 x 64 = 5376
7 kaarsjes in de houder	:	36 x 128 = 4608
8 kaarsjes in de houder	:	9 x 256 = 2304
9 kaarsjes in de houder	:	1 x 512 = 512

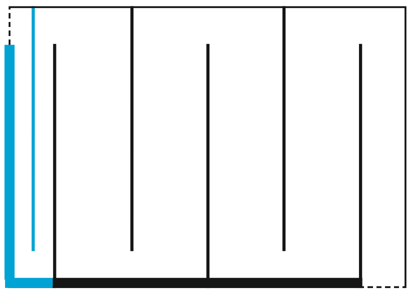
Als je deze tien aantallen bij elkaar optelt, vind je een getal dat in Les 3 van *Topklassers Wiskunde* deel 3 niet zou misstaan!

Toets 1

1

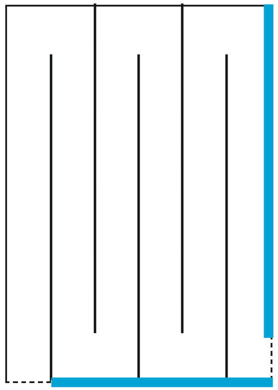
1a De goochelaar krijgt twee gaten te zien in plaats van één.

1b Een van de mogelijkheden waarop de goochelaar met extra knippen één groot gat had kunnen krijgen is de volgende:



1c Er zullen zes gaten te zien zijn.

1d Een van de mogelijkheden die één groot gat zal opleveren is de volgende:



2 Het aantal verschillende opstellingen is bij

0 kaarsjes in de houder	:	1 x 1 = 1
1 kaarsje in de houder	:	4 x 2 = 8
2 kaarsjes in de houder	:	6 x 4 = 24
3 kaarsjes in de houder	:	4 x 8 = 32
4 kaarsjes in de houder	:	1 x 16 = 16

In totaal zijn dit 81 opstellingen.

Ook nu blijkt (net als in opgave 3 van Les 4) het totale aantal een relatie te hebben met Les 3 van *Topklassers Wiskunde* deel 3.
Zou dat toeval zijn of hebben we hier te maken met weer een van de getalbijzonderheden die in de driehoek van Pascal te ontdekken zijn?

Les 5 GAME

1 Er zijn verschillende criteria mogelijk op grond waarvan je een plaatsingslijst kunt maken.

Een mogelijkheid is om uit te gaan van de hoogste klassering in de vier toernooien. Een speler die als hoogste klassering een finaleplaats heeft, komt dan hoger dan een speler die in geen van de toernooien verder is gekomen dan de halve finale.

Een andere mogelijkheid is om punten toe te kennen aan een behaalde klassering. Vervolgens worden per speler alle punten uit

de vier toernooien bij elkaar opgeteld en komt de speler met het hoogste aantal punten bovenaan op de plaatsingslijst.
Hierbij is natuurlijk wel van belang hoeveel punten toegekend worden aan de verschillende klasseringen.

In Les 2 wordt verder ingegaan op het toekennen van punten aan de verschillende klasseringen.

2 Aangezien plaatsingslijsten verschillend kunnen zijn op grond van de gekozen criteria, tonen we het wedstrijdschema aan de hand van de rangnummers van de plaatsingslijst.
Afhankelijk van de ordening op de plaatsinglijst kunnen de namen van de spelers ingevuld worden.

In wedstrijd a speelt de nummer 1 van de plaatsingslijst tegen de nummer 16. In het wedstrijdschema wordt de winnaar van een wedstrijd met de hoofdletter W aangegeven. Wa betekent: de winnaar van wedstrijd a.

a. 1 -16
i. Wa - Wb
b. 8 - 9
m. Wi - Wj
c. 5 - 12
j. Wc - Wd
d. 4 - 13
o. Wm - Wn
e. 3 - 14
k. We - Wf
f. 6 - 11
n. Wk - Wl
g. 7 - 10
l. Wg - Wh
h. 2 - 15

3 De volgorde waarin de zestien tennistermen genoteerd worden, zal afhankelijk zijn van de opgestelde plaatsingslijst. Wij vermelden de tennistermen hier in alfabetische volgorde.

1. ace	5. dropshot	9. hardcourt	13. return
2. backspin	6. forehand	10. love game	14. set
3. baseline	7. game	11. matchpoint	15. smash
4. deuce	8. gravel	12. racket	16. tiebreak

Les 6 SET

1 Uit de onderlinge posities van Emilio Duce, Gerald Laver en Dirk Phortos blijkt dat de hoogste klassering niet als belangrijkste criterium geldt.
Gerald Laver en Dirk Phortos hebben als hoogste klassering een halve finale. De hoogste klassering van Emilio Duce is een kwartfinale en toch staat Emilio Duce hoger op de plaatsingslijst dan Gerald Laver en Dirk Phortos.

2 Meerdere oplossingen zijn mogelijk.
Een voorbeeld van een puntenverdeling waarbij alle spelers een verschillend puntentotaal hebben, is de volgende:

Bereikte resultaat	*winnaar*	*finale*	*halve finale*	*kwartfinale*	*achtste finale*
aantal punten	**1050**	**650**	**400**	**250**	**150**

3

3a Bij de puntenverdeling uit tabel 2 zouden Dirk Phortos en Emilio Duce beiden uitkomen op 1000 punten.

3b Het antwoord op deze vraag is een persoonlijke keus.
De hoogste klassering van Dirk Phortos (een halve finale) is hoger dan de hoogste klassering van Emilio Duce (een kwartfinale). Dat kan een argument zijn om Dirk Phortos hoger te plaatsen dan Emilio Duce.
Een argument om Emilio Duce hoger te plaatsen kan zijn dat Emilio Duce gemiddeld beter presteerde.

Bij de puntenverdeling uit tabel 2 zou de plaatsingslijst er op hooguit de plaatsen 7 en 8 anders uitzien dan de in de les genoemde plaatsingslijst:

1. André Velmoge	2950
2. Alexander Ec	2850
3. Martin Hass	1750
4. Thierry Montipach	1650

5. Eric Mag 1300
6. Ingmar Beertak 1100
7. Emilio Duce en Dirk Phortos 1000
9. Gerald Laver 900
10. Cedric Kerta 800
11. Esteban Sibelan 700
12. Hadi Cortudar 650
13. Rob Runet 600
14. Tim Se 450
15. Peter Bansick 300
16. Faraji Nardohe 150

Een keus voor de plaatsen 7 en 8 moet dan nog gemaakt worden.

Les 7 Pincode-ezelsbruggetjes deel 1

1 Bij *eau de cologne* hoort de pincode 4711.
4711 is namelijk een merknaam van eau de cologne, een reukwater dat van oorsprong uit Keulen komt.

2 Oplossing pincodepuzzel

(1) 5		(2) 9			(3) 8		(4) 5			(5) 0	
(6) 7	0	5	0		9		(7) 4	7	4	2	
3		3		(8) 2	9	6	0			1	
(9) 1	(10) 0	5	(11) 0		9		(12) 7	(13) 2	2	9	
	7		9			(14) 0		4			(15) 6
	(16) 4	2	9	(17) 8		(18) 5	7	6	(19) 8		6
	8		(20) 1	6	5	9		(21) 6	2	5	7
				7		2			3		3
(22) 1		(23) 1	(24) 9	0	(25) 5		(26) 0	(27) 0	4	(28) 9	
0			1		9			8		7	
(29) 3	7	6	5		3			(30) 8	1	6	4
0			(31) 4	1	8	1		2		9	

Les 8 Pincode-ezelsbruggetjes deel 2

1 Ter beoordeling van de leerkracht en tevens te gebruiken als nakijkexemplaar voor iemand die de puzzel heeft opgelost.

2 Ter beoordeling van de leerkracht en (na kopiëren) in te vullen door geïnteresseerde puzzelaars.

Toets 2

1

<u>Tyrza</u> (1) - Toyah (8)

<u>Tyrza</u> (1) - Trynke (5)

Tessel (4) - <u>Trynke</u> (5)

Tyrza (1) - <u>Teun</u> (7)

<u>Thara</u> (3) - Tum (6)

Thara (3) - <u>Teun</u> (7)

Tika (2) - <u>Teun</u> (7)

De winnaar van een wedstrijd is onderstreept.
Tussen haakjes staat het rangnummer op de plaatsingslijst.
Teun is de winnares van het *Meisjes Top Acht Toernooi*.

2 Oplossing pincodepuzzel

0	6	8	**1**	9	8	**8**	5	1
0								**5**
4								3
6								3
4								**3**
7								9
4								2
6	5	**9**	0	1	**2**	7	2	**7**

- mobiel kwadraat *0681*
- drie maal zeven jaar vóór de eerste druk van dit werkboek *1988*
- samen 100 *8515*
- 5 en negen op de manier van het liedje *5333*
- drie machten van drie op volgorde *3927*
- tafel acht en negen dubbel *7272*
- 100 jaar na de eerste druk van dit werkboek *2109*
- 18.000 min vier keer de voorgaande code *9564*
- 1 naar beneden *4746*
- 80 kwadraat *6400*

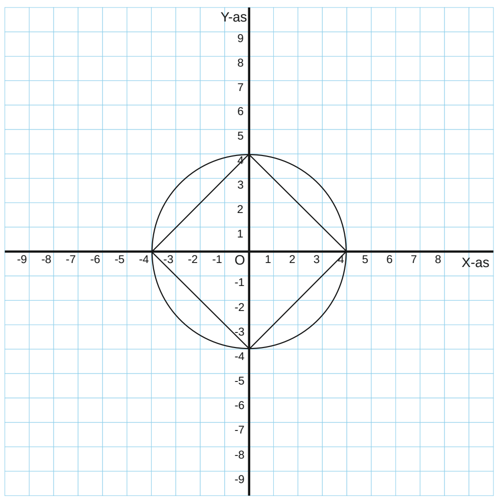
Les 9 Eenwielers deel 1

1 Je zou een groter wiel aan de fiets kunnen monteren. Dan leg je per omwenteling van de pedalen een grotere afstand af.

2 Bij een twee keer zo grote omtrek wordt per omwenteling van het wiel een grotere afstand afgelegd dan bij een twee keer zo grote oppervlakte.
Meer uitleg over deze vraag vind je in Les 10.

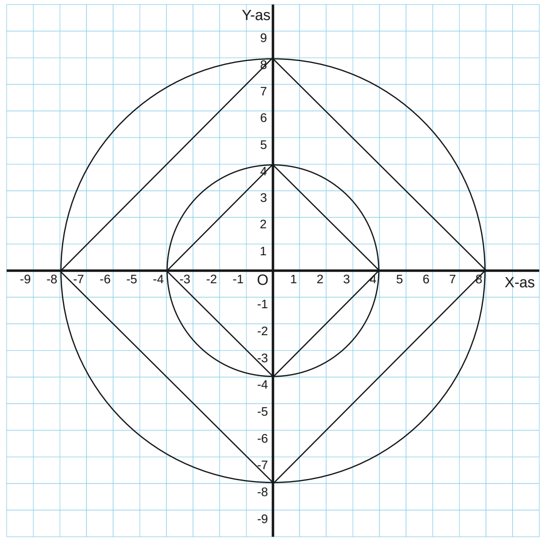
Les 10 Eenwielers deel 2

1



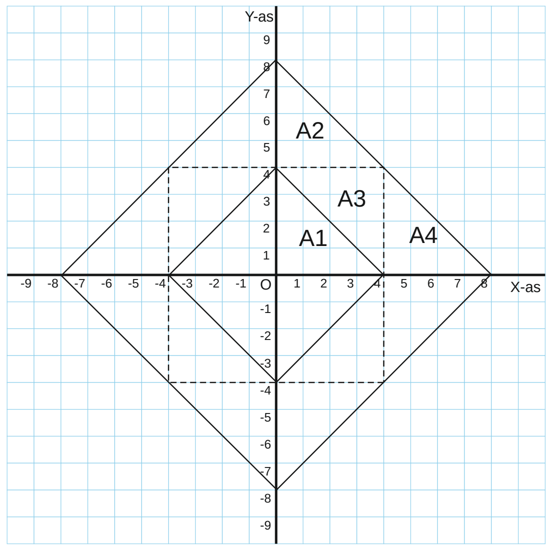
Er zijn meer mogelijkheden voor de ligging van het vierkant in de cirkel.

2



Bij vergroting van de rechthoekige driehoek met als hoekpunten O, (4,0) en (0,4) zal de schuine zijde twee maal zo lang worden, als ook de rechthoekszijden twee maal zo lang worden.
Dit gaat op voor alle zijden van het vierkant, dus de omtrek van het nieuwe vierkant is dan twee maal zo groot als de omtrek van het oorspronkelijke vierkant.

3 De driehoeken A1, A2, A3 en A4 zijn even groot.
De kleine driehoek A1 past vier maal in de grote driehoek en zo past ook het kleine vierkant vier maal in het grote vierkant.



4. De oppervlakte van het grote vierkant is vier maal zo groot als de oppervlakte van het kleine vierkant.

5. Een twee keer zo grote omtrek is gunstiger dan een twee keer zo grote oppervlakte.
Bij een twee keer zo grote omtrek is de oppervlakte al vier keer zo groot. Als de oppervlakte ‘slechts’ twee keer zo groot is zal de omtrek minder dan twee keer zo groot zijn.

Bij een ‘rond’ wiel geldt een soortgelijke redenering, een twee keer zo grote omtrek is ook dan gunstiger.
In Les 13 en Les 14 wordt ingegaan op de vraag hoe je de omtrek en de oppervlakte van een cirkel kunt berekenen.

Les 11 De treinplanner deel 1

1. Het traject Den Dolder – Baarn is enkelsporig. Bij enkelspoor kunnen treinen elkaar over het algemeen alleen op de stations kruisen. Uit de vertrekstaten kun je aflezen dat de treinen uit beide richtingen om 13:29 uur in Soest zijn. Daar kunnen de treinen elkaar dus kruisen.
Bij het traject Utrecht – Den Dolder is er niet zo’n overlappend tijdstip en zijn er toch treinen die elkaar kruisen. Op dit traject is dubbelspoor.

2. Treinen kruisen elkaar op station Soest (bijvoorbeeld om 13:29 uur) en tussen Utrecht Overvecht en Bilthoven (tussen 13:10 uur en 13:16 uur).

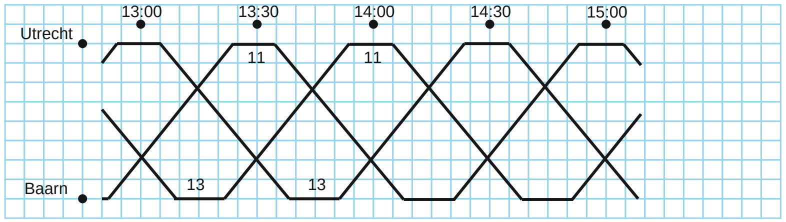
3. Voor deze dienstregeling zijn minimaal drie treinen nodig. De trein die om 13:05 uur uit Utrecht vertrekt, kan ditzelfde traject weer op zijn vroegst rijden om 14:35 uur. De twee andere treinen vertrekken uit Utrecht om 13:35 uur en om 14:05 uur.

4. De trein die onderweg is naar Baarn en volgens de dienstregeling om 14:59 uur zou moeten vertrekken uit Soest, kan door de vertraging van de andere trein pas vertrekken om 15:01 uur en zal dus ook enkele minuten vertraging oplopen.

5. Als de trein die stilstaat de trein is die naar Baarn onderweg is, moet de trein die afkomstig is uit Baarn hier nog langskomen. Die zal ook vertraging oplopen.
Als de trein uit de richting Baarn stilstaat, is de trein naar Baarn dit punt al gepasseerd. Dan zijn er dus geen directe gevolgen voor andere treinen, want met slechts vijf minuten vertraging zal de trein in Den Dolder zijn voor weer een andere trein richting Baarn daar arriveert.

6. 20% van de tijd staat er geen enkele trein stil op station Utrecht of op station Baarn. Per uur staat er 26 minuten een trein op station Baarn en 22 (andere) minuten een trein op station Utrecht. Blijft over 12 minuten en dat is 20% van een uur.

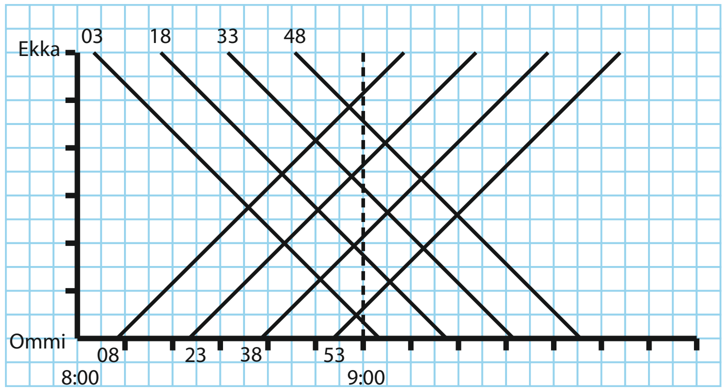
In onderstaande grafiek is dit zichtbaar gemaakt.



Les 12 De treinplanner deel 2

1. De treinen van Immo en Akke zullen elkaar wel kruisen.
Akke is vertrokken om 8:33 uur en Immo is vertrokken om 8:23 uur.

2. Onderstaande grafiek laat zien dat de kans dat de trein van Immo en de trein van Akke elkaar vóór 9:00 uur kruisen groter is dan 50%, als tien van de zestien mogelijkheden om te kruisen links van de stippellijn liggen.



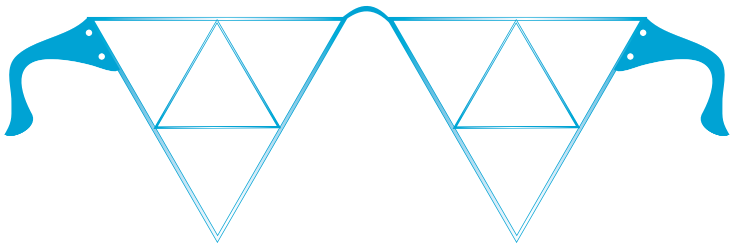
Deze situatie doet zich voor als er om 8:03 uur een trein uit Ekka vertrekt en om 8:08 uur een trein uit Ommi. Als beide treinen vijf minuten later vertrekken liggen slechts zes van de zestien mogelijkheden links van de stippellijn en is er minder dan 50% kans op een kruising van treinen.
Immo noemt een kans van 75%. Daaruit volgt haar vertrektijdstip 8:23 uur, omdat drie van de vier mogelijkheden voor Akke een kruising van treinen vóór 9:00 uur oplevert.
Akke zou zonder de informatie van Immo uitgekomen zijn op een kans van 50%. Daaruit volgt zijn vertrektijdstip 8:33 uur.
De treinen van Immo en Akke zullen elkaar kort voor 9:00 uur kruisen.

3 Er zijn verschillende mogelijkheden.
Met de gegevens nummer 2, 3, 4, 6 (of 11), 8, 9, 10, 12 en 13 kan het vraagstuk opgelost worden. Hierbij is het minimale aantal gewichtspunten nodig, namelijk 19 punten.

Toets 3

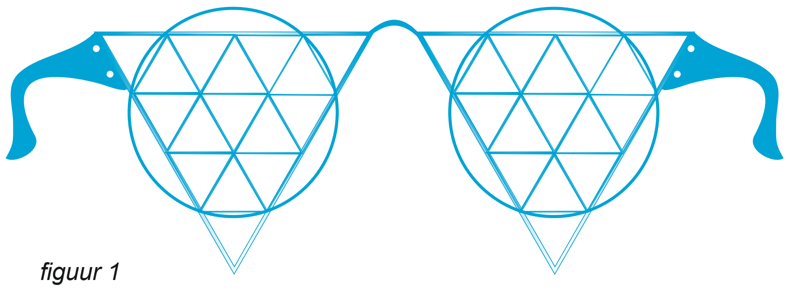
1

1a



1b De opticien heeft voor de vier brillen de dubbele hoeveelheid titanium nodig, dus een zelfde hoeveelheid extra.

2 In de vier ronde brillen zit meer titanium verwerkt dan in de drie hoekige brillen. Elk driehoekig glas is op te delen in twaalf gelijke lijnstukken. Uit figuur 1 blijkt dat de omtrek van een cirkelvormig glas groter is dan de totale lengte van negen van die lijnstukken.
Voor vier ronde brillen zijn meer dan 72 ‘stukken titanium’ nodig, terwijl er voor drie hoekige brillen precies 72 van die stukken nodig zijn.



figuur 1

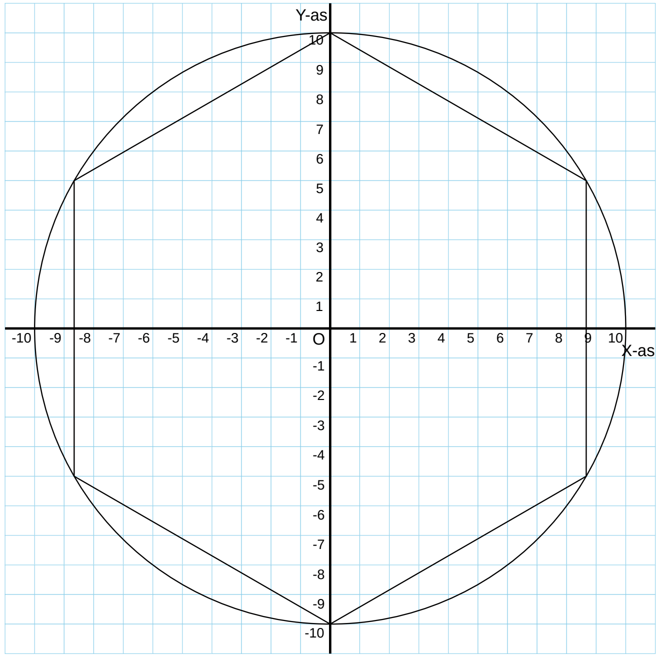
3 Vandaag ontmoet de sneltrein naar Litbrug van 10:25 uur vijf kruisende treinen.

Volgens de dienstregeling ontmoet de sneltrein naar Litbrug vier kruisende treinen. De helft daarvan vertrekt tijdens de reis van de sneltrein naar Litbrug, de andere helft is al vertrokken vóór het begin van die reis.
Twee uit Litbrug vertrekkende treinen tijdens een normale reis van de sneltrein naar Litbrug betekent dat het tijdsinterval tussen twee uit Litbrug vertrekkende treinen een halve reistijd bedraagt.

Uit de gegevens volgt ook dat de reistijd van de vertraagde trein met de helft wordt verlengd. (Want dan is de tijd van stilstaan een derde deel.)
Zoals uit het voorgaande blijkt, zal er in die halve reistijd één trein vertrekken met als gevolg dat de vertraagde sneltrein één trein extra zal ontmoeten.

Les 13 πkeren over cirkels deel 1

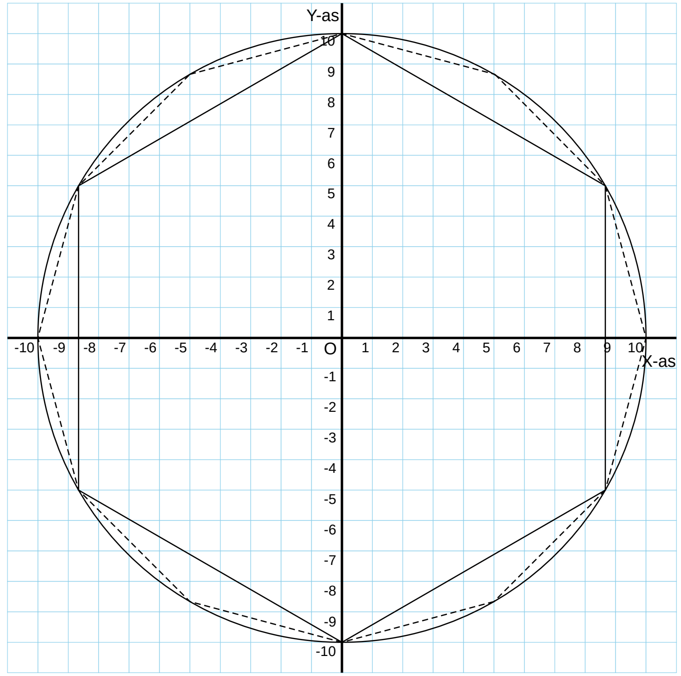
1



2 Je kiest eerst een eenvoudig cirkelpunt, bijvoorbeeld (0,10).
De cirkel door O met (0,10) als middelpunt heeft twee snijpunten met de oorspronkelijke cirkel. Als je die snijpunten met de passer construeert, kun je vervolgens met de passerpunt op een gevonden snijpunt en de passer op dezelfde straal steeds ‘doorcirkelen’ naar een volgend snijpunt met de oorspronkelijke cirkel. Op deze wijze ontstaat een regelmatige zeshoek.

3 De omtrek van de zeshoek is 6 x 10 cm = 60 cm.

4



Je kunt de spiegellijn tussen twee hoekpunten van de zeshoek construeren door twee even grote cirkels te tekenen. Ieder van deze cirkels heeft één van beide hoekpunten als middelpunt en gaat bijvoorbeeld door O.
De lijn door de snijpunten van deze twee cirkels is de spiegellijn en wordt ook wel de middelloodlijn genoemd (van het verbindingslijnstuk tussen de twee hoekpunten). De middelloodlijn snijdt de oorspronkelijke cirkel in een hoekpunt van de regelmatige twaalfhoek (zelfs in twee hoekpunten!) en gaat door O.

5 De oppervlakte van de twaalfhoek is 300 cm².
Voor de uitleg zie het antwoord op vraag 6.

6 Je kunt de twaalfhoek verdelen in twaalf even grote driehoeken. Elke driehoek is te zien als een driehoek met basis 10 cm en hoogte 5 cm.
Dat is duidelijk te zien in bijvoorbeeld de driehoek met hoekpunten O en (10,0). Het lijnstuk vanuit het derde hoekpunt loodrecht naar de X-as bepaalt de hoogte van de driehoek. De oppervlakte van de driehoek is $\frac{1}{2}$ x 10 x 5 = 25 cm².
De oppervlakte van de twaalfhoek is dus 12 x 25 = 300 cm².

Les 14 π keren over cirkels deel 2

1 De puntjes in π = 3,14159… geven aan dat de rij cijfers eindeloos lang doorgaat.

2 De cirkel in figuur 1 van Les 13 heeft als omtrek π x 20 cm.

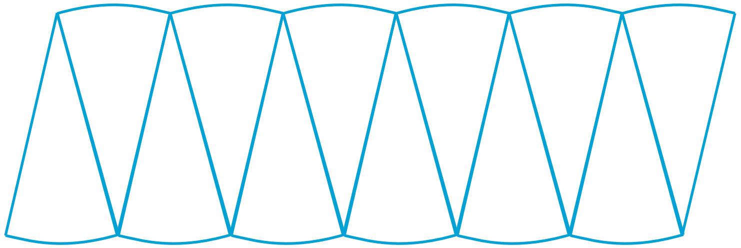
3 $\frac{\text{Omtrek twaalfhoek}}{\text{Omtrek cirkel}} = \frac{62{,}12}{(\pi \times 20)} = 0{,}989.$

0,989 x 100 = 98,9. Het verschil is dus 1,1%.

4 Als de straal van de cirkel r is, is de diameter 2 x r.
Een cirkel met straal r heeft dus als omtrek π x 2 x r, dit wordt ook wel geschreven als $2\pi r$.

5 De zijden van een vierkant met omtrek 76 cm hebben een lengte van 19 cm. De oppervlakte van het vierkant is 19 x 19 = 361 cm².
De zijden van een vierkant met omtrek k cm hebben lengte $\frac{k}{4}$ cm.
De oppervlakte van het vierkant is $\frac{k}{4} \times \frac{k}{4} = \frac{k^2}{16}$ cm².

6



7 De taartpunten zoals neergelegd in opdracht 6 benaderen samen de vorm van een parallellogram.
De breedte daarvan wordt gevormd door de helft van alle cirkelboogjes; dat is de helft van de omtrek. De hoogte van het parallellogram is gelijk aan de straal van de cirkel.
De oppervlakte van (de benadering van) het parallellogram is
$\frac{1}{2} \times \pi \times 2 \times r$ (breedte) x r (hoogte) = π x r x r, ook wel πr^2.

De oppervlakte van een cirkel met straal r blijkt inderdaad πr^2 te zijn.

8 $\frac{\text{Oppervlakte twaalfhoek}}{\text{Oppervlakte cirkel}} = \frac{300}{(\pi \times 10 \times 10)} = \frac{3}{\pi} = 0{,}955.$

0,955 x 100 = 95,5. Het verschil is dus 4,5%.

Bij oppervlakte heb je te maken met verschillen in twee dimensies, daardoor is het verschil al snel groter dan bij de omtrek.

Hierin ligt ook de reden dat een twee keer zo grote oppervlakte van een wiel minder extra meters oplevert dan een twee keer zo grote omtrek. Bij een twee keer zo grote oppervlakte moet je de winst ‘uitsmeren’ over twee dimensies en zal dus de omtrek (één dimensie) minder dan twee keer zo groot zijn.

Les 15 AND

1 Meerdere antwoorden zijn mogelijk.

Een nadeel bij de puntenverdeling 5,4,3,2,1 is, dat dan twee maal de halve finale bereiken meer punten oplevert (2 x 3) dan één maal winnaar zijn van een toernooi.

Een nadeel bij de puntenverdeling 81,27,9,3,1 is dat iemand die twee maal de finale bereikt (en net niet wint) minder punten verdient dan iemand die een van de finales nipt wint en bij het andere toernooi in de eerste ronde wordt uitgeschakeld.

2 De rij 150, 250, 450, 700, 1000 is geen rekenkundige rij. Het verschil tussen de termen is niet constant. De verschillen vormen wel bijna een rekenkundige rij: 100, 200, 250, 300.

De rij 150, 250, 450, 700, 1000 is ook geen meetkundige rij. Er is geen constante vermenigvuldigingsfactor.
Bij 250 : 150 , 450 : 250, 700 : 450 en 1000 : 700 vind je achtereenvolgens de quotiënten 1,67 - 1,8 - 1,56 - 1,43. (afgerond tot twee cijfers achter de komma)

3 Twee verloren finales leveren meer punten op dan drie verloren halve finales: 2F > 3H (2 x F > 3 x H) of 3H < 2F.
Twee verloren halve finales leveren meer punten op dan één verloren finale: 2H > F of F < 2H.

Uit het tweede uitgangspunt volgt ook: 2F < 4H. (verdubbeling)
De combinatie van de twee uitgangspunten in één regel is dan te formuleren als 3H < 2F < 4H. (of als 4H > 2F > 3H)

4 Nee. Het gaat overal goed, behalve bij het aantal punten voor de winnaar. 2W < 3F in plaats van 3F < 2W.

5 Het antwoord hangt af van de gekozen puntenverdeling.

6 W + H > 2F in woorden: Een gewonnen toernooi en een verloren halve finale leveren samen meer punten op dan twee verloren finales.

7 Uit de twee eerder genoemde uitgangspunten volgen zowel 2W > 3F als 2H > F.
Uit de combinatie hiervan volgt 2W + 2H > 3F + F (= 4F). Dat geldt dan ook voor de helften: W + H > 2F!

Les 16 MATCH!

1 H = K + A.

2

Bereikte resultaat	*winnaar*	*finale*	*halve finale*	*kwartfinale*	*achtste finale*
aantal punten	**1050**	**650**	**400**	**250**	**150**

3 De puntenverdeling in tabel 1 voldoet aan alle in Les 15 genoemde uitgangspunten. Het is alleen geen rekenkundige of meetkundige rij.

4 De vijf getallen uit de rij van Fibonacci zijn: 3, 5, 8, 13, 21.
Aan deze getallen gaan in de rij van Fibonacci de getallen 0, 1, 1 en 2 vooraf.

5 250 : 150 = 1,667 (afgerond)
400 : 250 = 1,6 (1,600)
650 : 400 = 1,625
1050 : 650 = 1,615 (afgerond)

6 150, 250, 400, 650, 1050, 1700, 2750, 4450, 7200, 11.650.

1700 : 1050 = 1,619 (afgerond)
2750 : 1700 = 1,618 (afgerond)
4450 : 2750 = 1,618 (afgerond)
7200 : 4450 = 1,618 (afgerond)
11.650 : 7200 = 1,618 (afgerond)

Toets 4

1

1a De omtrek van de rechthoekige glazen is 14 cm.
De cirkelvormige glazen hebben een straal van 2 cm. De omtrek is 4 x π cm (iets meer dan 12,5 cm).
De rechthoekige glazen hebben een grotere omtrek.

1b De oppervlakte van de rechthoekige glazen is 12 cm².
De oppervlakte van de cirkelvormige glazen is 4 x π cm² (iets meer dan 12,5 cm²).
De cirkelvormige glazen hebben een grotere oppervlakte.

1c Bij beide brillen wordt de oppervlakte van de glazen vier keer zo groot. (Ook de straal van de cirkelvormige glazen wordt twee keer zo groot.)
Ook in dit geval hebben dus de cirkelvormige glazen de grootste oppervlakte.

2

2a De omtrek van sjoelschijf A is 16 cm. De schijf heeft een diameter van 16 : π = 5,09 cm (afgerond).
Voor schijf A kun je het best een sjoelbak gebruiken met openingen van 5,5 cm.

2b De oppervlakte van sjoelschijf B is 23 cm². De schijf heeft een diameter van $\sqrt{}$ (92 : π) = 5,41 cm (afgerond).
Schijf B past maar net door een opening van 5,5 cm. Daarom zal een sjoelbak met openingen van 6,0 cm voor sjoelschijf B de meest geschikte zijn.

3

laatste 16	*laatste 32*	*laatste 64*	*laatste 128*
100	**50**	**50**	**0**

4 W = F + H. F = H + K, dus W = H + K + H = 2H + K.
H = K + A, dus W = K + A + K + A + K = 3K + 2A.

5

Bereikte resultaat	*achtste finale*	*kwart finale*	*halve finale*	*finale*	*winnaar*
aantal punten	**400**	**600**	**800**	**1000**	**1200**
aantal punten	**400**	**600**	**900**	**1350**	**2025**
aantal punten	**400**	**600**	**1000**	**1600**	**2400**
aantal punten	**400**	**600**	**1000**	**1600**	**2600**

Eindtoets A

a Er zijn 242 verschillende opstellingen, 121 met een witte steen en 121 met een zwarte steen!

b 15 minuten van het uur rijden de treinen niet, dat is 25%.

c Er zitten 2 gaten in het papier.

d Het andere snijpunt is (18,0), dus x = 18.

e De oppervlakte van de cirkel wordt 169 keer zo groot.

f De tegenstander staat op nummer 27.

g Het achtste getal van de rij van Fibonacci is 13.

h De som van de cijfers in 3664 (of 6436) is 19.

Het schema van de kwartfinales:

Les 1 en 2 (c) - <u>Les 15 en 16 (g)</u>   2 – 13

<u>Les 7 en 8 (h)</u> - Les 9 en 10 (d)   19 – 18

<u>Les 5 en 6 (f)</u> - Les 11 en 12 (b)   27 – 25

<u>Les 3 en 4 (a)</u> - Les 13 en 14 (e)   242 – 169

De halve finales gaan tussen Les 15/16 en Les 7/8 en tussen Les 5/6 en Les 3/4.

Eindtoets B

Ter beoordeling van de leerkracht.