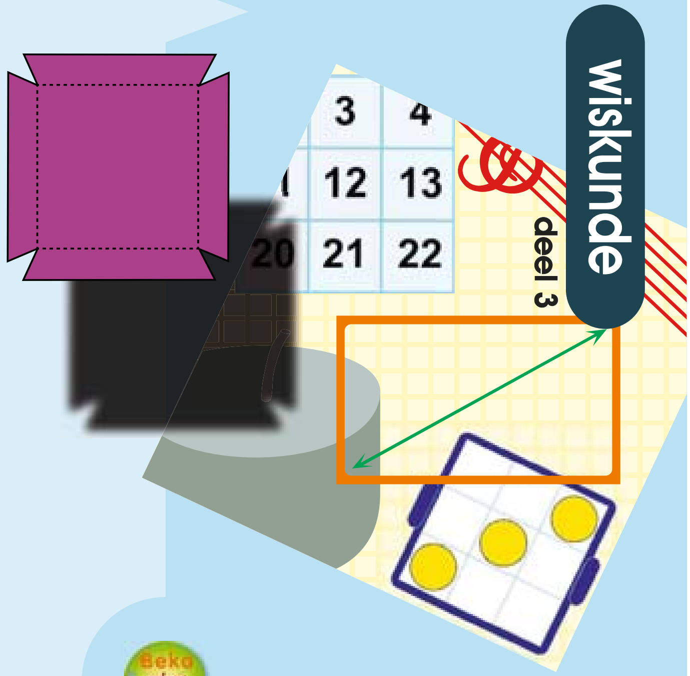
Pascal Goderie

TOPklassers

Antwoordenboek

wiskunde

deel 3



ISBN 978 90 262 4216 8

Beko plus reeks

Beko plus reeks

TOPklassers

wiskunde

deel 3

Antwoordenboek

Auteur
Pascal Goderie

Bekadidact

Illustraties
Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Vormgeving en lay-out
Kre-add/Marcel Westervoorde, Alphen a/d Rijn

Eerste druk, eerste oplage 2009

ISBN 978 90 262 4216 8

Inleiding voor de leerkracht

Dit is het antwoordenboek van het derde deel van *Topklassers Wiskunde*.
Topklassers Wiskunde zijn vooral bestemd voor kinderen van groep 7 en 8 die behoefte hebben aan een extra uitdaging. Het werkboek voor de leerling staat vol met wiskundige vraagstukken. Voor kinderen die zo'n uitdaging aankunnen en die niet snel opgeven.
Voor die kinderen bevatten *Topklassers Wiskunde* tal van interessante problemen, problemen waaraan zelfs ook veel middelbare scholieren hun hart kunnen ophalen.
De kinderen gaan in deel 3 onder andere goochelen met machten van drie en onderzoeken de uitslagen van de Champions League.
Voor kinderen die wat minder zelfstandig met problemen aan de gang kunnen, is dit boekje niet zo geschikt. Het is niet de bedoeling, dat u als leerkracht veel steun moet gaan bieden. Wel zijn de opgaven bijzonder geschikt om in tweetallen of in kleine groepjes aan te werken. Misschien kunnen dergelijke groepjes hun nieuw opgedane kennis eens aan de groep presenteren?
Ook een klassikale aanpak van een van de problemen uit het werkboek kan een incidentele verrijking zijn van uw reguliere lessen rekenen-wiskunde.

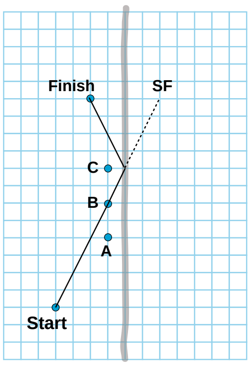
Leerlingen die een les afhebben, kunnen in dit antwoordenboek zelf de antwoorden controleren.

Wie weet, komen uw leerlingen verrassend uit de hoek met mooie wiskundige oplossingen.
Veel plezier met uw *wiskunde topklassers*!

Pascal Goderie

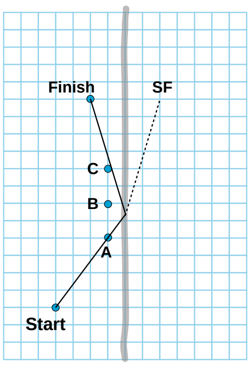
Les 1 De slimschuifwedstrijd deel 1

1 Elke route van Start naar Finish via een punt op het slijmspoor is even lang als de route van Start naar SF (SpiegelFinish) via datzelfde punt op het slijmspoor. De route van Start naar SF is het kortst als het een rechte lijn is. Dit is het geval bij de route via B zoals in figuur 1.
Slak Beppie zal dus de kortste route schuiven.



figuur 1

Als je via A of C van Start naar Finish gaat en onderweg een punt op het slijmspoor (de spiegellijn) raakt, dan is de lengte van de route altijd langer dan het rechte lijnstuk van Start naar SF. In figuur 2 kun je dat zien voor een route via A.



figuur 2

Ook in Les 2 komt dit probleem aan de orde.

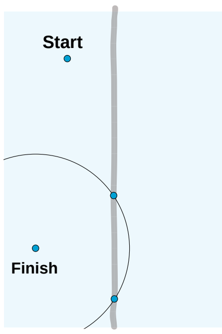
Les 2 De slimschuifwedstrijd deel 2

1 De kortste route is via punt B.
Zie het antwoord bij opgave 1 van Les 1.

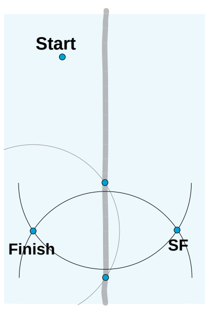
2 Slak Beppie zal de kortste route schuiven.

3 Net als bij het probleem van Les 1 kun je gebruikmaken van het spiegelpunt van Finish in de spiegellijn. Wij noemen dat punt SF (SpiegelFinish). In de eerste twee stappen van de constructie laten we zien hoe je met behulp van een passer SF kunt bepalen.

In stap 1 teken je een cirkel met Finish als middelpunt, zodat de twee snijpunten met de spiegellijn even ver van Finish af liggen, maar ook even ver van SF. Zie figuur 1.



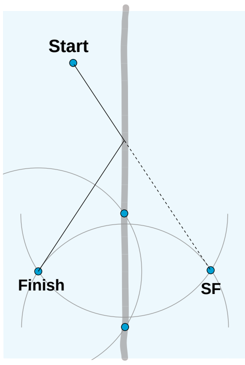
figuur 1



figuur 2

In stap 2 gebruik je de twee snijpunten op de spiegellijn om het punt SF te bepalen. Dit doe je door de passer vanuit beide punten een cirkel te laten beschrijven waar Finish op ligt en dus ook SF. Een deel van deze cirkels is afgebeeld in figuur 2. Finish en SF zijn de snijpunten van deze twee cirkels.

In stap 3 teken je eerst een stippellijn van Start naar SF. Vervolgens teken je (met een doorgetrokken lijn) de route van Start naar Finish via het snijpunt met de spiegellijn. Zie figuur 3. De route die zo ontstaat is de kortste route van Start naar Finish via het slijmspoor.



figuur 3

Les 3 De machtige drie

1. $3^1 = 3$ $3^2 = 3 \times 3 = 9$ $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

   $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

2. $3^7 = 2187$, is groter dan 2^{10} (= 1024), zelfs groter dan 2^{11}.

   $3^6 = 729$ en is kleiner dan 2^{10}.

3. Elke som van machten van 3 uit opgave 1 levert een dergelijk getal op.
   Mogelijke antwoorden zijn 4, 10, 12, 13, 28, 30, 31, 36, 37, 39, 40, maar ook grotere getallen zoals 108 en 246 zijn mogelijk.

4. 2, 5, 6, 7 en 8 zijn niet te schrijven als som van verschillende machten van 3.
   Wel kun je bijvoorbeeld 2 schrijven als 1 + 1, ofwel als $3^0 + 3^0$, maar dan gebruik je dezelfde macht twee keer en dat is niet de bedoeling.

5. 2 = 3 – 1 10 = 9 + 1

   5 = 9 – 3 – 1 25 = 27 – 3 + 1

   7 = 9 – 3 + 1 32 = 27 + 9 – 3 – 1

6. 13 = 9 + 3 + 1
   5 = 9 – 3 – 1, 5 + 13 = 18, het dubbele van 9.
   Wat er van 9 afgetrokken wordt om 5 te maken, moet er dus bij 9 opgeteld worden om 13 te maken, anders kom je niet op 18 uit.

7. 14 = 27 – 13 = 27 – 9 – 3 – 1
   14 is het eerste getal waarbij je niet genoeg hebt aan 9, 3 en 1. Je moet hier ook 27 gebruiken.

8. 40 is het laatste getal waarbij je aan 27, 9, 3 en 1 genoeg hebt.
   40 = 27 + 9 + 3 + 1.

   41 is dus het eerste getal waarbij je $3^4 = 81$ nodig hebt.
   41 = 81 – 40 = 81 – 27 – 9 – 3 – 1

9. 121 is het laatste getal waarbij je aan 81, 27, 9, 3 en 1 genoeg hebt. 121 = 81 + 27 + 9 +3 + 1.

   Bij 122 heb je 3^5 nodig, 122 = 243 – 121 = 243 – 81 – 27 – 9 – 3 – 1.

10. Dat is niet mogelijk.

Les 4 Goocheltruc voor snelle rekenaars

Bij de goocheltruc horen de volgende zeven kaarten:

1	4	7
10	13	16
19	22	25

2	3	4
11	12	13
20	21	22

5	6	7
8	9	10
11	12	13

14	15	16	17	18
19	20		21	22
23	24	25	26	27

26	23	20
17	14	11
8	5	2

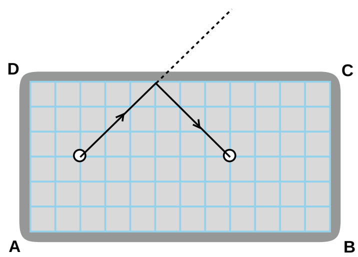
25	24	23
16	15	14
7	6	5

22	21	20
19	18	17
16	15	14

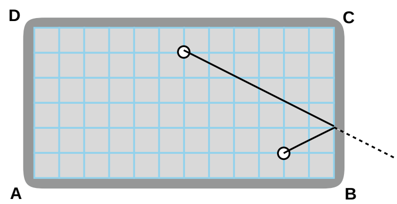
1. Je moet de tabel maken voor de getallen 1 tot en met 81.
   Je moet dan negen kaartjes maken.
   Op acht van de kaartjes staan 27 getallen, op het negende kaartje staan 41 getallen.

Toets 1

1.



2. De biljartster zal via band CB spelen.



3. De vrouw heeft het getal 20 in gedachten genomen.
   20 = 3 + 27 – 1 – 9.

4. Deze situatie klopt niet.
   De kaart met de 2 linksboven en de kaart met de 5 rechtsonder kunnen niet beide tegelijk apart gelegd worden.
   Er is geen getal dat op beide kaarten staat.
   De ene kaart betekent 3 optellen en de andere 3 aftrekken.
   Dat gaat niet samen.

Les 5 Drie kaarsjes deel 1

1. Er zijn 84 verschillende opstellingen. In vraagstuk 1 van Les 6 wordt dit antwoord stap voor stap afgeleid.

2. Er zijn verschillende vereenvoudigingen denkbaar.
   De vereenvoudiging die we in deze les gebruiken is:

   Hoeveel verschillende opstellingen zijn er waarop twee kaarsjes in een kaarsenhouder met negen vakjes kunnen staan?

3. Er zijn 36 verschillende opstellingen.
   Dit antwoord volgt uit de antwoorden op de volgende vragen.

3a Er zijn negen vakjes om het eerste kaarsje in te zetten.

3b Er blijven steeds acht vakjes over om het tweede kaarsje in te zetten.

3c Je kunt op 9 x 8 = 72 verschillende manieren de twee kaarsjes in de houder plaatsen.

3d Elke opstelling kan op precies twee manieren voorkomen. Het ene kaarsje op de ene plaats en het andere kaarsje op de andere, of net andersom.

3e De helft van het aantal manieren bij vraag 3c leidt tot verschillende opstellingen.

Er zijn dus 72 : 2 = 36 verschillende opstellingen met twee kaarsjes in de kaarsenhouder.

Les 6 Drie kaarsjes deel 2

1

1a Er zijn negen vakjes om het eerste kaarsje in te zetten.

1b Welk van de negen vakjes je ook kiest, er blijven bij iedere positie acht vakjes over voor het tweede kaarsje.

1c Je kunt op 9 x 8 = 72 verschillende manieren de eerste twee kaarsjes in de houder plaatsen.

1d Bij elk van de 9 x 8 manieren om de eerste twee kaarsjes te plaatsen, blijven er steeds zeven vakjes over voor het derde kaarsje.

1e Er zijn dus 9 x 8 x 7 verschillende manieren om drie kaarsjes in de houder te plaatsen.

1f Er zijn 3 x 2 (x 1) = 6 manieren om de afgebeelde opstelling te maken.

1g Ja, voor elke opstelling zijn er zes verschillende manieren.
(3 voor het eerste kaarsje, keer 2 voor het tweede, keer 1 voor het derde)

1h Er zijn dus $\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}$ = 84 verschillende opstellingen met drie kaarsjes in de kaarsenhouder.

2 Er zijn $\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2}$ = 126 verschillende opstellingen met vier kaarsjes in de kaarsenhouder.

3 Op een zeker moment zal het aantal mogelijke opstellingen kleiner worden.
Er zijn wel steeds meer manieren mogelijk om de kaarsjes te plaatsen, maar er zullen ook steeds meer van die manieren onder één bepaalde opstelling vallen.
Voor negen kaarsjes is er uiteindelijk maar één opstelling mogelijk. Dat is vanzelfsprekend, maar uiteindelijk laat ook de reeks dit duidelijk zien:

$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$.

Les 7 Wiscalculie deel 1

1

<u>de foute som</u>	<u>de juiste som</u>
1485 + 6239 = 7184	1485 + 6329 = 7814

(1845 + 6329 = 8174 is ook correct, maar hierbij is het eerste cijfer van het antwoord gewijzigd.)

3906 + 5188 = 8194		3096 + 5818 = 8914

2

2204 + 7651 = 9855	en	2024 + 7561 = 9585
2204 + 7561 = 9765	en	2024 + 7651 = 9675

3

<u>'fout'</u>	<u>correct</u>
5432 + 3759 = 9911	5432 + 3759 = 9191
5432 + 3759 = 9101	5342 + 3759 = 9101 5432 + 3579 = 9011
5432 + 3759 = 9011	5342 + 3759 = 9101 5432 + 3579 = 9011
5432 + 3759 = 8921	5342 + 3579 = 8921
5432 + 3759 = 8291	5342 + 3579 = 8921

Bij de antwoorden 9101 en 9011 zijn er twee mogelijkheden om een correcte som te maken.

4 Bij de foute som 43 x 76 = 2458 kun je 34 x 76 = 2584 als correcte som maken.

5 Behalve in 867 – 243 = 624 kun je 678 – 432 = 246 ook omzetten in de volgende sommen:

687 – 423 = 264	768 – 342 = 426
876 – 234 = 642	786 – 324 = 462

6 Alle mogelijke sommen staan genoemd bij het antwoord op vraag 5 van Les 8.

Les 8 Wiscalculie deel 2

1 Er zijn zes getallen mogelijk:
178, 187, 718, 781, 817 en 871.

2 Voor ieder getal zijn zes mogelijkheden.
Als je al die mogelijkheden met elkaar combineert en zou willen onderzoeken, dan zijn er 6 x 6 x 6 x 6 = 1296 sommen te onderzoeken.

3

+	236	263	326	362	623	632
178	414	441	504	540	801	**810**
187	423	450	513	549	**810**	819
718	954	981	1044	**1080**	1341	1350
781	1017	1044	**1107**	1143	1404	1413
817	1053	**1080**	1143	1179	1440	1449
871	**1107**	1134	1197	1233	1494	1503

4

+	459	495	549	594	945	954
135	594	630	684	729	**1080**	1089
153	612	648	702	747	1098	**1107**
315	774	**810**	864	909	1260	1269
351	**810**	846	900	945	1296	1305
513	972	1008	1062	**1107**	1458	1467
531	990	1026	**1080**	1125	1476	1485

5 De vetgedrukte antwoorden in de tabellen zijn de getallen waarbij correcte sommen mogelijk zijn.

Zo kun je aflezen 178 + 632 = **810** en 315 + 495 = **810**, dus
178 + 632 = 315 + 495, wat neerkomt op
178 + 632 – 495 = 315.

Alle oplossingen:

178 + 632 – 495 = 315	187 + 623 – 495 = 315
178 + 632 – 459 = 351	187 + 623 – 459 = 351
718 + 362 – 945 = 135	817 + 263 – 945 = 135
718 + 362 – 549 = 531	817 + 263 – 549 = 531
781 + 326 – 954 = 153	871 + 236 – 954 = 153
781 + 326 – 594 = 513	871 + 236 – 594 = 513

Toets 2

1 Je kunt op 8 x 7 = 56 verschillende manieren de twee kaarsjes in de houder plaatsen.
Omdat elke opstelling op precies twee manieren kan voorkomen, is het aantal verschillende opstellingen de helft van deze 56 manieren.

Er zijn dus $\frac{56}{2}$ = 28 verschillende opstellingen met twee kaarsjes in de kaarsenhouder.

2 Je begint met een van de kaarsjes, het maakt niet uit welk van de twee.
Er zijn zestien vakjes om dit eerste kaarsje in te zetten.
Bij elke gekozen positie blijven er vijftien vakjes over voor het tweede kaarsje.
Al die posities leveren een andere opstelling op.

Er zijn dus 16 x 15 = 240 verschillende opstellingen voor de twee verschillende kaarsjes.

3

3a Voor elk getal zijn twee mogelijkheden.
Er kunnen op deze manier 2 x 2 = 4 verschillende sommen ontstaan.

3b Er zijn twee koppels.
Het ene koppel is 59 – 13 = 46 / 95 – 31 = 64 en
het andere koppel is 59 – 31 = 28 / 95 – 13 = 82.

3c Verschillende antwoorden zijn mogelijk.
Bijvoorbeeld 78 – 36 = 42

3d De som 73 + 16 levert één koppel op:

73 + 16 = 89 / 37 + 61 = 98.

De andere twee sommen vormen geen koppel: 37 + 16 = 53 en 73 + 61 = 134.

3e Verschillende antwoorden zijn mogelijk.
Een voorbeeld is 26 + 31 met als koppels
26 + 31 = 57 / 62 + 13 = 75 en
26 + 13 = 39 / 62 + 31 = 93.

3f Verschillende antwoorden zijn mogelijk. Bijvoorbeeld 53 en 21:

53 + 21 = 74 / 35 + 12 = 47 en 53 + 12 = 65 / 35 + 21 = 56
53 – 21 = 32 / 35 – 12 = 23 en 53 – 12 = 41 / 35 – 21 = 14

Les 9 Breedbeeldtelevisie deel 1

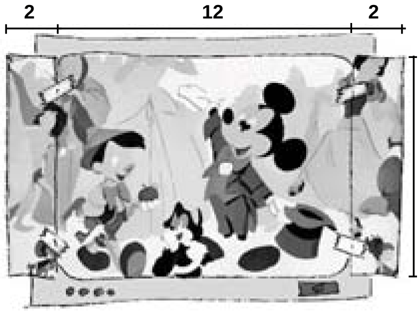
1 Als het scherm kleiner wordt (met zwarte balken):

De verhouding 4:3 is ook te zien als 16:12.
Om daar 16:9 van te maken moet je drietwaalfde van de hoogte afhalen (verdeeld over een zwarte balk boven en een zwarte balk onder).
Er gaat dan een vierde deel, ofwel 25%, van het scherm af.

Als het scherm groter wordt (stukken aangeplakt):

De verhouding 4:3 is ook te zien als 12:9. Om daar 16:9 van te maken moet je viertwaalfde bij de breedte bijplakken (tweetwaalfde links en tweetwaalfde rechts). Er komt dan een derde deel, ofwel $33\frac{1}{3}$%, van het scherm bij.

Het deel dat erbij komt is dus groter dan het deel dat eraf gaat.



2 Je kunt een verband ontdekken door de verschillen tussen de opeenvolgende diagonalen te berekenen.

Het verschil tussen 106,68 en 93,98 bedraagt 12,70 , het verschil tussen 93,98 en 81,28 bedraagt ook 12,70 en het verschil tussen 81,28 en 71,12 bedraagt 10,16.

Het verschil tussen 12,70 en 10,16 bedraagt 2,54 en dat is in dit geval de bindende factor.
2,54 cm is de lengte van de Engelse lengtemaat inch.
Het beeldformaat van een televisie wordt vaak aangegeven in aantal inch.

De vier afgebeelde toestellen hebben achtereenvolgens diameters van 28 inch, van 32 inch, van 37 inch en van 42 inch.

3 De schermhoogte van de breedbeeldtelevisie is 45 cm, immers de verhouding breedte : hoogte = 16 : 9.

4 De schermbreedte is ongeveer 69 cm, de schermhoogte ongeveer 52 cm. Een nauwkeurige berekening van de afmetingen komt in Les 10 aan de orde.

5 Het breedbeeldscherm heeft de langste diagonaal.

Als je de breedte en de hoogte van een scherm weet kun je de diagonaal berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras. (Zie Les 8 van *Topklassers Wiskunde* deel 2)
Bij de breedbeeldtelevisie vind je een diagonaal van ongeveer 92 cm, bij het oude toestel is de diagonaal bijna 87 cm.

Les 10 Breedbeeldtelevisie deel 2

1 De oppervlakte van het breedbeeldscherm is 80 x 45 = 3600 cm^2.

1a

De oppervlakte is 2 x 40 x 2 x 30 = 4800 cm^2.

1b De precieze vergrotingsfactor ligt tussen 1 en 2, omdat de oppervlakte van het breedbeeldscherm tussen 1200 en 4800 ligt.

1c

Aangezien 3600 dichter bij 4800 ligt dan bij 1200, zal de precieze vergrotingsfactor dichter bij 2 dan bij 1 liggen.

De precieze vergrotingsfactor ligt tussen 1,7 en 1,8.

1d 1,7 x 1,7 x 40 x 30 = 3468 en 1,8 x 1,8 x 40 x 30 = 3888.

De afmetingen van het oude beeldscherm bij de ondergrens 1,7 zijn 68 bij 51 cm.

1e De afmetingen van het oude beeldscherm bij de bovengrens 1,8 zijn 72 bij 54 cm.

De precieze vergrotingsfactor ligt tussen 1,73 en 1,74.

1f 1,73 x 1,73 x 40 x 30 = 3591,48 en 1,74 x 1,74 x 40 x 30 = 3633,12.

De afmetingen van het oude beeldscherm bij de ondergrens 1,73 zijn 69,2 bij 51,9 cm.
De afmetingen van het oude beeldscherm bij de bovengrens 1,74 zijn 69,6 bij 52,2 cm.

De precieze vergrotingsfactor ligt tussen 1,732 en 1,733.

1g

Bij vergrotingsfactor 1,732 is de oppervlakte van het oude beeldscherm 1,732 x 1,732 x 40 x 30 = 3599,7888 cm^2. Dat is dus zeer nauwkeurig.

Bij vergrotingsfactor 1,732 zijn de afmetingen van het oude beeldscherm 69,28 bij 51,96 cm.

Les 11 Voetbaluitslagen Champions League deel 1

1 Uit de stand kun je aflezen dat Chelsea in een van de wedstrijden tegen CFR Cluj gelijk speelde. Het zijn de enige twee clubs met een gelijkspel.
Aangezien Chelsea zonder tegendoelpunten is, moet de uitslag 0 - 0 geweest zijn.

Dat betekent dat Chelsea in de andere wedstrijd met 4 - 0 won van Girondins de Bordeaux en dat CFR Cluj in dezelfde ronde met 2 - 1 van AS Roma won.
Op grond van de aanwijzing van Ibrahim over het aantal doelpunten moet dat in de eerste ronde geweest zijn.

De rest van de gegevens is nu eenvoudig aan te vullen:

gespeelde wedstrijden eerste ronde			uitslag
Chelsea	–	Girondins de Bordeaux	4 - 0
AS Roma	–	CFR Cluj	1 - 2

gespeelde wedstrijden tweede ronde			uitslag
CFR Cluj	–	Chelsea	0 - 0
Girondins de Bordeaux	–	AS Roma	1 - 3

2 Als je onderzoekt of FC Barcelona en FC Basel tegen elkaar gevoetbald kunnen hebben, loop je bij iedere mogelijke uitslag vast als je de uitslagen van de andere wedstrijden gaat invullen.
Hieruit en uit de aanwijzing van Marcella, dat Shakhtar Donetsk in de tweede ronde een thuiswedstrijd speelde tegen FC Barcelona, is af te leiden dat FC Basel in de eerste ronde thuis tegen Shakhtar Donetsk speelde. Vanwege het doelsaldo na twee wedstrijden van FC Basel (1-4) zijn er voor deze

wedstrijd vier uitslagen mogelijk: 0 - 1, 0 - 2, 1 - 2 en 1 - 3. Uitgaande van die uitslagen levert dat de volgende vier mogelijkheden op voor de uitslagen van Groep C.

mogelijkheid 1 :

eerste ronde			uitslag
FC Basel	–	Shakhtar Donetsk	0 - 1
FC Barcelona	–	Sporting Lissabon	2 - 0

tweede ronde			uitslag
Sporting Lissabon	–	FC Basel	3 - 1
Shakhtar Donetsk	–	FC Barcelona	2 - 3

mogelijkheid 2 :

eerste ronde			uitslag
FC Basel	–	Shakhtar Donetsk	0 - 2
FC Barcelona	–	Sporting Lissabon	2 - 1

tweede ronde			uitslag
Sporting Lissabon	–	FC Basel	2 - 1
Shakhtar Donetsk	–	FC Barcelona	1 - 3

mogelijkheid 3 :

eerste ronde			uitslag
FC Basel	–	Shakhtar Donetsk	1 - 2
FC Barcelona	–	Sporting Lissabon	3 - 1

tweede ronde			uitslag
Sporting Lissabon	–	FC Basel	2 - 0
Shakhtar Donetsk	–	FC Barcelona	1 - 2

mogelijkheid 4 :

eerste ronde			uitslag
FC Basel	–	Shakhtar Donetsk	1 - 3
FC Barcelona	–	Sporting Lissabon	3 - 2

tweede ronde			uitslag
Sporting Lissabon	–	FC Basel	1 - 0
Shakhtar Donetsk	–	FC Barcelona	0 - 2

Door de aanwijzing van Vianni, dat FC Basel in de tweede wedstrijdronde met meer doelpunten verschil verloor dan in de eerste ronde, vallen mogelijkheid 2 en mogelijkheid 4 af.

3 De derde aanwijzing (in beide wedstrijden kreeg FC Barcelona een doelpunt tegen) betekent dat van de mogelijkheden 1 en 3 de uitslagen van mogelijkheid 3 de juiste zijn.

De eerste aanwijzing klopt wel. FC Barcelona en FC Basel kunnen in de eerste of tweede ronde nog niet tegen elkaar gevoetbald hebben, dus ontmoeten ze elkaar in de derde ronde. Deze aanwijzing leidt echter niet tot één mogelijke oplossing.

De tweede aanwijzing klopt eveneens. FC Barcelona scoorde in een van beide wedstrijden drie maal en in de andere wedstrijd twee maal. Als je namelijk uitgaat van een wedstrijd waarin FC Barcelona vier of vijf maal scoorde, kom je op een dood spoor. Ook de aanwijzing over het drie maal scoren leidt echter niet tot één mogelijke oplossing.

Les 12 Voetbaluitslagen Champions League deel 2

1 Stand C1 en stand C4 zijn in theorie mogelijk.

De uitslagen van de derde wedstrijdronde bij stand C1:

Shakhtar Donetsk –	Sporting Lissabon	2 - 2
FC Basel –	FC Barcelona	1 - 4

De uitslagen van de derde wedstrijdronde bij stand C4:

Shakhtar Donetsk –	Sporting Lissabon	0 - 1
FC Basel –	FC Barcelona	0 - 5

Stand C2 is niet mogelijk.
De wedstrijd FC Basel – FC Barcelona zou volgens het doelsaldo van FC Barcelona geëindigd zijn in 1 - 1 en volgens het doelsaldo van FC Basel in 2 - 2 .

Stand C3 is ook niet mogelijk.
Volgens deze stand zou FC Barcelona gelijkgespeeld hebben tegen Shakhtar Donetsk. Deze twee clubs kunnen elkaar echter niet in ronde drie treffen, want ze speelden al in de tweede ronde tegen elkaar.

Stand C4 is in 2008 de werkelijke stand geweest.

2 Als je een klasgenoot je vraagstuk hebt laten oplossen, bespreek dan of je het eens bent over de antwoorden.
Of laat de leerkracht je vraagstuk bekijken.

In 2008 was dit de werkelijke stand na drie wedstrijden:

Groep A

	Club	Wed	w	g	v	p	v-t
1	Chelsea	3	2	1	0	7	5-0
2	CFR Cluj	3	1	1	1	4	2-2
3	AS Roma	3	1	0	2	3	4-4
4	Girondins de Bordeaux	3	1	0	2	3	2-7

Toets 3

1

1a Bij een schermbreedte van 80 cm is een schermhoogte van 40,5 cm eigenlijk te laag voor de 'ideale' 16 : 9 verhouding van 80 cm bij 45 cm.
Daardoor zal er in de breedte ruimte over zijn.
De zwarte balken zijn aan de zijkanten te zien.

1b Bij een schermbreedte van 80 cm is een schermhoogte van 49,5 cm eigenlijk te hoog voor de 'ideale' 16 : 9 verhouding van 80 cm bij 45 cm.
Daardoor zal er in de hoogte ruimte over zijn.
De zwarte balken bevinden zich boven en onder op het scherm.

1c Het percentage zwart is het hoogst bij het scherm van 40,5 cm hoog.

De film op dat scherm wordt geprojecteerd in de afmetingen 72 cm bij 40,5 cm (4,5 x 16 : 4,5 x 9).
Er is in totaal een strook zwart van 8 cm bij 40,5 cm, dat is 10% van het hele scherm. (324 cm² van in totaal 3240 cm²)

De film op het andere scherm wordt geprojecteerd in de afmetingen 80 cm bij 45 cm (5 x 16 : 5 x 9).
Er is in totaal een strook zwart van 80 cm bij 4,5 cm, dat is een elfde deel van het hele scherm en daarmee minder dan 10%. (360 cm² van in totaal 3960 cm²)

1d Een argument voor het kleinere scherm kan zijn dat de feitelijke hoeveelheid zwart op het scherm minder is. (324 cm² tegenover 360 cm²)

1e Een argument voor het grotere scherm kan zijn dat er in verhouding minder zwart is op het scherm (zie antwoord 1c).
Ook is de hoeveelheid zwart over een grotere lengte

uitgespreid en het zwart zal daardoor minder in het oog vallen.
Bovendien is het beeld groter.

2

dinsdag 16 september	*eerste ronde*	*uitslag*
Panathinaikos -	Internazionale	0 - 2
Werder Bremen -	Anorthosis	0 - 0

woensdag 1 oktober	*tweede ronde*	*uitslag*
Anorthosis -	Panathinaikos	3 - 1
Internazionale -	Werder Bremen	1 - 1

woensdag 22 oktober	*derde ronde*	*uitslag*
Internazionale -	Anorthosis	1 - 0
Panathinaikos -	Werder Bremen	2 - 2

De uitslag van de wedstrijd Werder Bremen tegen Anorthosis is 0 - 0, want Werder Bremen speelde drie maal gelijk en scoorde niet in deze wedstrijd.
Omdat het doelsaldo van Werder Bremen 3-3 is en Werder Bremen slechts in één wedstrijd niet scoorde, heeft Werder Bremen ook een keer met 2 - 2 gelijkgespeeld.
Dat moet tegen Panathinaikos geweest zijn, want Internazionale heeft in totaal één tegendoelpunt.
De drie uitslagen met Werder Bremen zijn nu in te vullen.

Panathinaikos heeft in een van de overige twee wedstrijden nog één doelpunt gemaakt. Dat kan alleen maar tegen Anorthosis geweest zijn. Het andere tegendoelpunt voor Anorthosis moet dan uit de wedstrijd tegen Internazionale komen.
Uit deze gegevens zijn de overige uitslagen af te leiden.

Les 13 Vrijdag de dertiende

1 Afhankelijk van welk jaar het nu is, zal vrijdag de dertiende dit jaar een, twee of drie maal voorkomen.
Uit het vervolg van de les is af te leiden waarom dit zo is.

2 De eerste *dertiende* van 2009 is dinsdag 13 januari.
De volgende *dertiende* is 31 dagen later.
31 = 28 + 3, dus 13 februari is op een vrijdag.
Februari 2009 is geen schrikkelmaand, heeft 28 dagen.
Dus ook 13 maart valt op een vrijdag.
Op deze manier kun je van maand naar maand onderzoeken op wat voor een dag de *dertiende* valt.

2009	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
		di	vrij	vrij	ma	wo	za	ma	do	zo	di	vrij	zo

In het jaar 2009 komt vrijdag de dertiende drie maal voor, in februari, maart en in november.

3 Doorrekenend vanuit 2009 ziet de tabel voor 2010 er zo uit:

2010	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
		wo	za	za	di	do	zo	di	vrij	ma	wo	za	ma

In het jaar 2010 komt vrijdag de dertiende één maal voor, in augustus.

4 Een gewoon jaar (geen schrikkeljaar) heeft 365 dagen.
Dat zijn 52 weken plus één dag. Die ene dag zorgt voor het doorschuiven.
In een schrikkeljaar zul je vanaf maart daarom twee dagen moeten doorschuiven.

5 In de zeven maanden vanaf mei tot en met november komen alle dagen van de week precies één maal voor.
Dat is in 2009 zo, maar vanwege het doorschuiven (zie het antwoord op vraag 4) is dat ook in 2010 het geval.

6. Er is geen jaar zonder een vrijdag de dertiende.
Of het nu een gewoon jaar is of een schrikkeljaar, de zeven dagen van mei tot en met november schuiven zodanig door (één dag of twee dagen), dat het jaar daarop al deze dagen weer voorkomen. (maar dan in een andere volgorde)

7. 2012 is een schrikkeljaar, februari heeft dan 29 dagen.

2012	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
		vrij	ma	di	vrij	zo	wo	vrij	ma	do	za	di	do

2013	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
		zo	wo	wo	za	ma	do	za	di	vrij	zo	wo	vrij

8. Nee, vaker dan drie maal in één jaar kan vrijdag de dertiende niet voorkomen.

In de zeven maanden vanaf mei tot en met november valt de dertiende altijd op zeven verschillende dagen. Om vier maal de dertiende op dezelfde dag te krijgen moet de dertiende in de overige vijf maanden minstens drie keer op dezelfde dag vallen.
Dat is nooit het geval bij december tot en met april.

9. In 2015 komt vrijdag de dertiende weer drie maal voor.
Het is dan 5 ‘gewone’ jaren plus een schrikkeljaar verder dan in 2009, dus het schema van 2009 is zeven dagen opgeschoven en geldt ook voor 2015.

Les 14

1. De vrachtwagen zal het snelst op de plaats van bestemming zijn bij de route die de helft van de tijd door de stad gaat.

Dit kan aan de hand van een getallenvoorbeeld aannemelijk worden gemaakt. Een afstand waarmee je handig kunt rekenen is dan bijvoorbeeld een afstand van 300 km.

De helft van tijd door de stad betekent in dat geval 100 km door de stad (2 uur) en 200 km snelweg (2 uur).
In totaal vier uur onderweg.

De helft van de afstand door de stad betekent 150 km door de stad (3 uur) en 150 km snelweg (1,5 uur).
In totaal 4,5 uur onderweg.

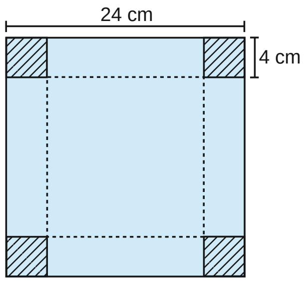
Je kunt het echter ook zonder getallenvoorbeeld uitleggen.

De vrachtwagen kan het best zo veel mogelijk van de tijd over de snelweg rijden, immers dat levert het dubbele aantal kilometers op.

De snelheid in de stad ligt lager dan op de snelweg.
De helft van de afstand door de stad betekent door die lagere snelheid dat je daar langer over doet. Dan rijd je dus meer dan de helft van de tijd door de stad. En dat is, zo merkten we al op, ongunstiger!

Les 15 Een bouwdoos?

1. Laat je leerkracht jouw tekening beoordelen.
Of vergelijk je oplossing met deze tekening.



2. a kan alle waarden van 1 tot en met 11 aannemen.
Met a = 0 heb je alleen een bodem en geen hoogte.
Met a = 12 hou je helemaal niets over.

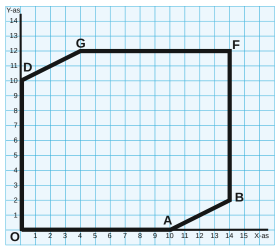
3. Bij a = 4 is de lengte van de doos 24 – 2 x 4 = 16 cm. (lengte van de doos = lengte van de bodem)
Dan is ook de breedte van de doos 16 cm.
De hoogte is 4 cm.
De inhoud van de doos is dus16 x 16 x 4 = 1024 cm³.
Dit is de enige waarde van a waarbij de inhoud boven de liter (1000 cm³) uitkomt, dus ook de waarde van a waarbij de inhoud van de doos het grootst is.

4. Bij een vierkant stuk karton van 12 cm lang is de inhoud van de doos het grootst voor a = 2.
De inhoud is dan 8 x 8 x 2 = 128 cm³.

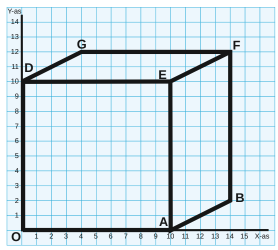
5. De lengte van het gearceerde vierkant is steeds een zesde deel van de totale lengte van het vierkant.
Bij een vierkant stuk karton van 48 cm lang is de inhoud van de doos het grootst voor a = 8.
De inhoud is in dat geval 32 x 32 x 8 = 8192 cm³.

Les 16 Bekijk het... van een andere kant

1.



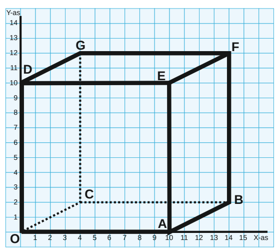
2.



E = (10,10).

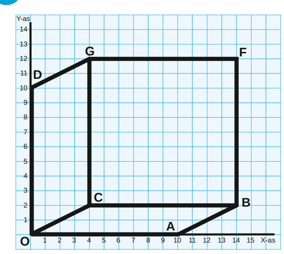
3. Vlak DEFG kan zowel bovenkant als onderkant zijn.
Is DEFG bovenkant, dan kijk je van boven op een kubus waarvan OAED een buitenkant is.
Is DEFG onderkant, dan vormen de drie vlakken ABFE, DEFG en OAED een holle figuur en kijk je op de binnenkant ervan.

4.

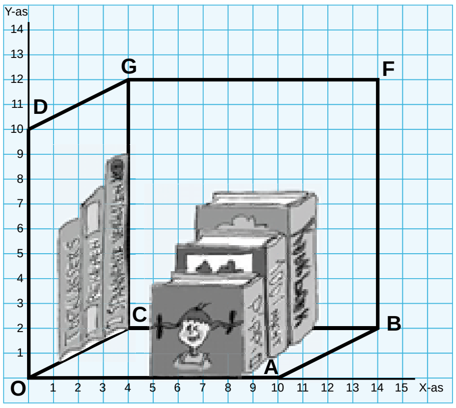


C = (4,2).

5.



6 De tekening zou er ongeveer zo uit kunnen zien.



Toets 4

1 In 2008 kwam alleen in juni een vrijdag de dertiende voor.
Via terugredeneren vanuit het huidige jaar kun je vinden op wat voor dag steeds de dertiende dag van de maand viel.

	13 valt op	jan	feb	mrt	apr	mei	jun	jul	aug	sep	okt	nov	dec
2008		zo	wo	do	zo	di	vrij	zo	wo	za	ma	do	za

2 De vrachtwagen reed twee maal zo lang op de snelweg.
Bovendien reed de vrachtwagen daar twee maal zo hard als in de stad.
De op de snelweg afgelegde afstand is dus vier maal zo groot als de in de stad afgelegde afstand.

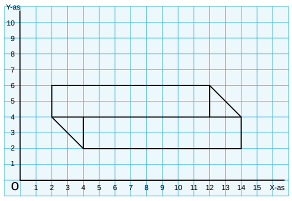
75 km moet daarom in een verhouding van 4 : 1 verdeeld worden, 60 km op de snelweg en 15 km in de stad.

15 km in 20 minuten betekent een gemiddelde snelheid van 45 km per uur in de stad.

60 km in 40 minuten betekent een gemiddelde snelheid van 90 km per uur op de snelweg.

3

3a



3b Driehoek FCG kan deel zijn van rechthoek FBCG, dan zie je driehoek FCG als deel van de binnenkant van een zijvlak.
Driehoek FCG kan ook deel zijn van rechthoek HGCD, dan zie je driehoek FCG als deel van de onderkant van een bovenvlak.

3c Driehoek ADE kan deel zijn van rechthoek ABFE, dan zie je driehoek ADE als deel van de bovenkant van een ondervlak (de bodem).
Driehoek ADE kan ook deel zijn van rechthoek EADH, dan zie je driehoek ADE als deel van de binnenkant van een zijvlak.

3d De inhoud van de doos is 100 cm^3 =
lengte x breedte x hoogte =
lengte AB x lengte AE x lengte AD = 10 x lengte AE x 2.
Hieruit volgt dat de lengte van zijde AE gelijk is aan 5 cm.

Eindtoets A

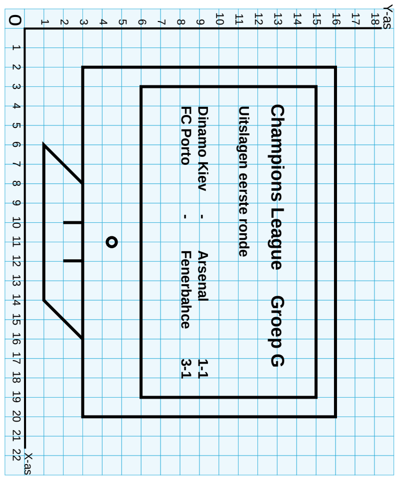
1 De mogelijkheden zijn:

3^9, 3^8 en 3^1, 3^7 en 3^2, 3^6 en 3^3, 3^6 en 3^2 en 3^1,

3^5 en 3^4, 3^5 en 3^3 en 3^1, 3^4 en 3^3 en 3^2.

Al deze mogelijkheden hebben dezelfde waarde, namelijk
3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 19.683.

2 Er zijn meerdere goede tekeningen mogelijk.
Belangrijk is dat de breedtehoogte-verhouding van het *beeldscherm* 16 : 9 is.



De stand geeft aan dat Dinamo Kiev twee maal gelijkspeelde.
Uit het doelsaldo van Dinamo Kiev en de 0 in de uitslag tegen Fenerbahce in de tweede ronde is af te leiden dat de tweede wedstrijd van Dinamo Kiev in 0 - 0 eindigde en de eerste wedstrijd van deze club in 1 - 1.
In die eerste wedstrijd kan volgens de andere gegevens alleen maar Arsenal de tegenstander geweest zijn.

Ook op grond van doelsaldo moet Fenerbahce in die eerste wedstrijd met 3 - 1 van FC Porto verloren hebben.

Om volledig te zijn won Arsenal in de tweede ronde met 4 - 0 van FC Porto.

Eindtoets B

Ter beoordeling van de leerkracht.